

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

### **Розрахунково-графічні завдання до тем 6 і 7**

**для студентів усіх механічних спеціальностей  
денної прискореної форми навчання**

Затверджено  
на засіданні методичної ради  
Протокол № 4 від 23.12.21

Краматорськ  
ДДМА  
2021

УДК 539.3/.5

Опір матеріалів : *розрахунково-графічні завдання до тем 6 і 7 [для студентів усіх механічних спеціальностей денної прискореної форми навчання]* / [уклад. Ю. С. Холодняк, Н. В. Чоста]. – Краматорськ : ДДМА, 2021. – 64 с.

Містять умови завдань до тем 6 «Напруження при плоскому згинанні» і 7 «Переміщення в пружних системах» прискореного курсу опору матеріалів, стислі теоретичні відомості, методичні вказівки і приклади виконання цих завдань, довідкові матеріали.

Укладачі

Ю. С. Холодняк, доц.  
Н. В. Чоста, доц.

Відп. за випуск

С. В. Подлесний, доц.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
1 ПОВНА ПЕРЕВІРКА МІЦНОСТІ БАЛКИ (РОЗШИРЕНИЙ ВАРІАНТ).....	5
1.1 Методичні вказівки до виконання завдання.....	5
1.2 Приклад розв'язання завдання 1 .....	11
2 ПЕРЕМІЩЕННЯ В БАЛКАХ .....	15
2.1 Методичні вказівки до виконання завдання 2.....	16
2.2 Приклад розв'язання завдання 2.....	20
3 ПЕРЕМІЩЕННЯ В ПЛОСКИХ РАМАХ.....	25
3.1 Методичні вказівки до виконання завдання 3.....	25
3.2 Приклад 1 розв'язання завдання 3.....	29
3.3 Приклад 2 розв'язання завдання 3.....	35
ЛІТЕРАТУРА.....	42
ДОДАТОК А. Основні параметри катаних профілів.....	43
ДОДАТОК Б. Параметри безпечного факторного простору двотаврів...	49
ДОДАТОК В. Креслення безпечного факторного простору двотаврів....	50
ДОДАТОК Г. Формула крайніх ординат і особливості її застосування...	62
ДОДАТОК Д. Зразок титульного аркуша звіту про виконання РГЗ.....	64

## ВСТУП

Опір матеріалів закладає основи інженерних розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість деталей машин і елементів споруд. Розрахунково-графічні завдання (РГЗ) з цієї дисципліни призначені для розвитку у студентів навичок самостійного виконання зазначених розрахунків і сприяють кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

Ця розробка є доповненням збірника РГЗ з опору матеріалів [1], виданого кафедрою технічної механіки ДДМА в 2007 році. Цим збірником користуються усі студенти денного відділення, котрі вивчають дану дисципліну.

Робочою програмою прискореного курсу цієї дисципліни передбачено виконання завдань з комплексного визначення напружень і переміщень у статично визначуваних балках і плоских рамах, що відноситься до найважливіших тем курсу – 6 і 7. Таких завдань у діючому збірнику нема. Надолуження цього недоліку і є метою даної розробки.

У розробці наведені 3 нових завдання – 1, 2, і 3, присвячених зазначеній тематиці й умовно віднесених до розділу 4 діючого збірника, у якому вже є завдання 4.1, 4.2, 4.3 і 4.4. Тож, нові завдання можна вважати РГЗ з відповідними номерами 4.5, 4.6 і 4.7.

У даній розробці така ж структура завдань, як і в діючому збірнику. Кожен студент отримує від викладача свій індивідуальний номер варіанта вихідних даних для виконання усіх завдань, передбачених навчальним планом.

Номер варіанта складається з чотирьох цифр. Перша та друга з них вказують номери стовпчиків відповідно в першій та другій таблицях числових даних, третя і четверта – номер конструктивної схеми відповідно до номера прізвища студента у списку академічної групи.

Основні вимоги до оформлення виконаних завдань (розрахунково-графічних робіт, скорочено РГР) :

1 Титульний аркуш і наступні сторінки повинні бути виконаними на білому цупкому папері формату А4 і скріплені між собою будь – яким способом.

2 Титульний аркуш повинен мати вигляд згідно зі зразком, наведеним у додатку Д. Наступні сторінки за погодженням з викладачем оформляються в рукописному або друкованому варіанті на одній стороні аркуша. На них наводяться умови завдання з вихідними даними відповідно до номера варіанта, розрахункова схема з усіма необхідними позначеннями, результати розрахунку разом з їх поясненнями.

3 Усі графічні побудови виконуються в певному масштабі і з дотриманням існуючих правил оформлення конструкторської документації.

4 Усі розміри, навантаження і результати обчислень повинні мати розмірності в міжнародній системі одиниць (СІ).

# 1 ПОВНА ПЕРЕВІРКА МІЦНОСТІ БАЛКИ (РОЗШИРЕНИЙ ВАРІАНТ)

Для заданої балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати переріз (двотавр) і зробити повну її перевірку на міцність за III теорією міцності. Задачу розв'язати аналітичним та графічним / 5 / способами.

Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2 і рисунка 1.1.

*Таблиця 1.1 – Вихідні дані до завдання 1*

Величина	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[\sigma]$ , МПа	150	160	170	180	190	150	160	170	180	190
$M$ , кН·м	30	35	40	45	50	35	40	45	50	30
$P$ , кН	40	45	50	55	60	50	55	60	45	40
$q$ , кН/м	10	20	30	40	50	30	10	20	40	50

*Таблиця 1.2 – Вихідні дані до завдання 1*

Величина, м	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a$	1	1,5	2	2,5	3	1	1,5	2	2,5	3
$b$	2	2,5	3	1	1,5	2,5	3	1	1,5	2
$c$	3	2	2,5	1,5	1	2	2,5	3	1	1,5

## 1.1 Методичні вказівки до виконання завдання 1

**При аналітичному способі** розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

- 1 Визначаються опорні реакції балки.
- 2 Будуються епюри поперечних сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$ .
- 3 З аналізу епюри згинальних моментів визначається максимальний згинальний момент –  $M_{\max}$ .

4 З умови міцності за нормальними напруженнями визначається потрібний осьовий момент опору перерізу –  $W_x$ :

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (1.1)$$

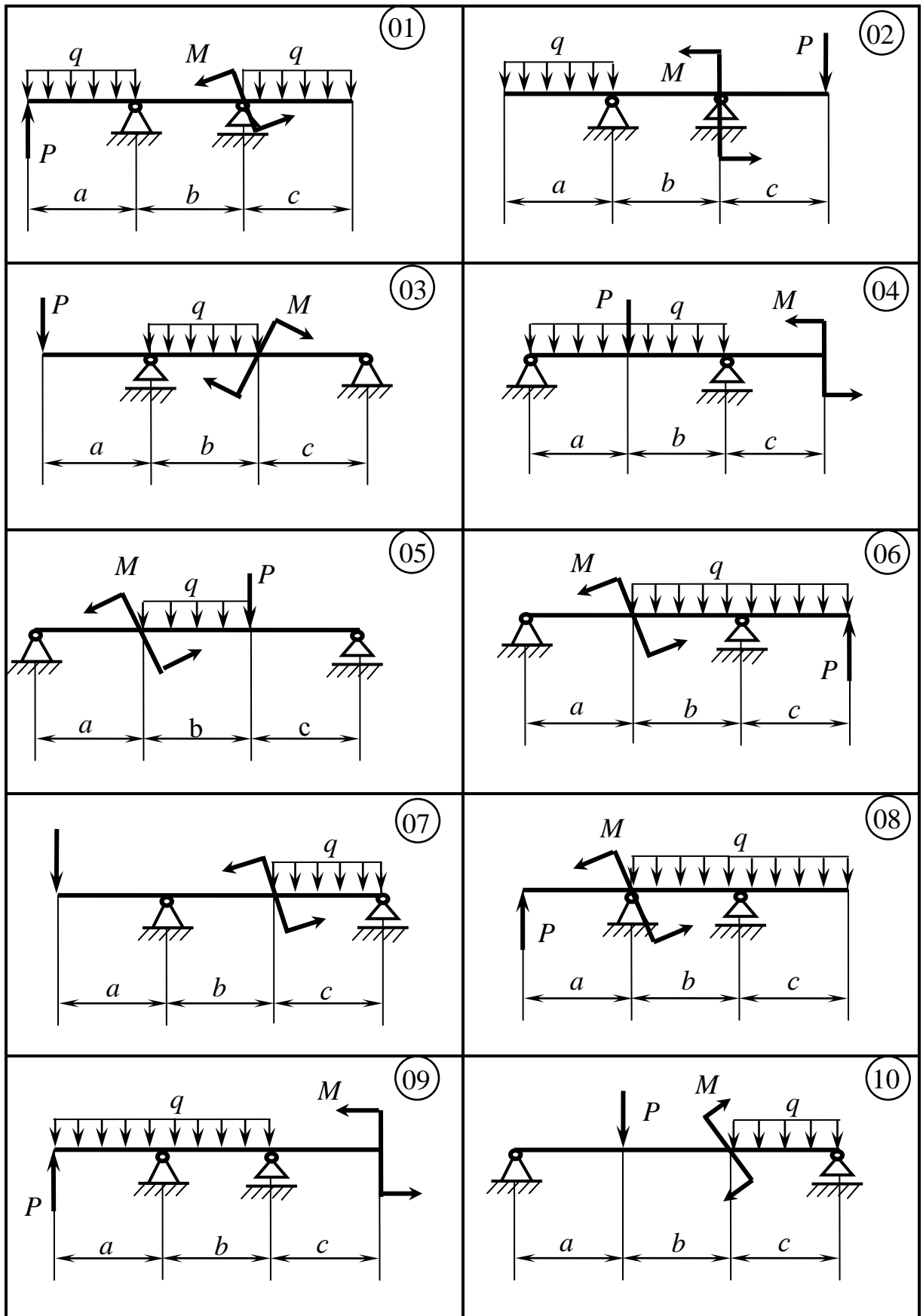


Рисунок 1.1 – Схеми балок до завдання 1

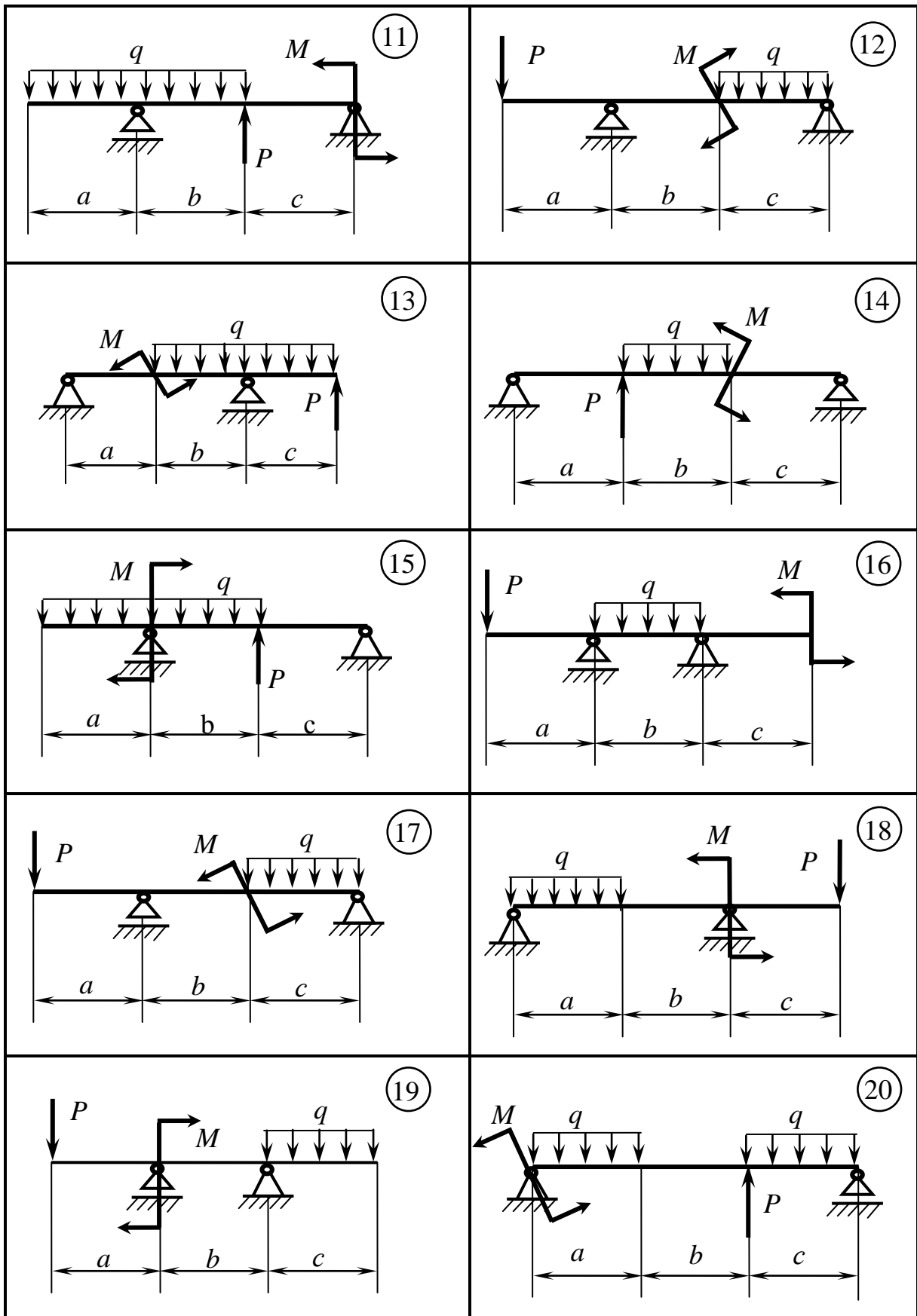


Рисунок 1.1, аркуш 2

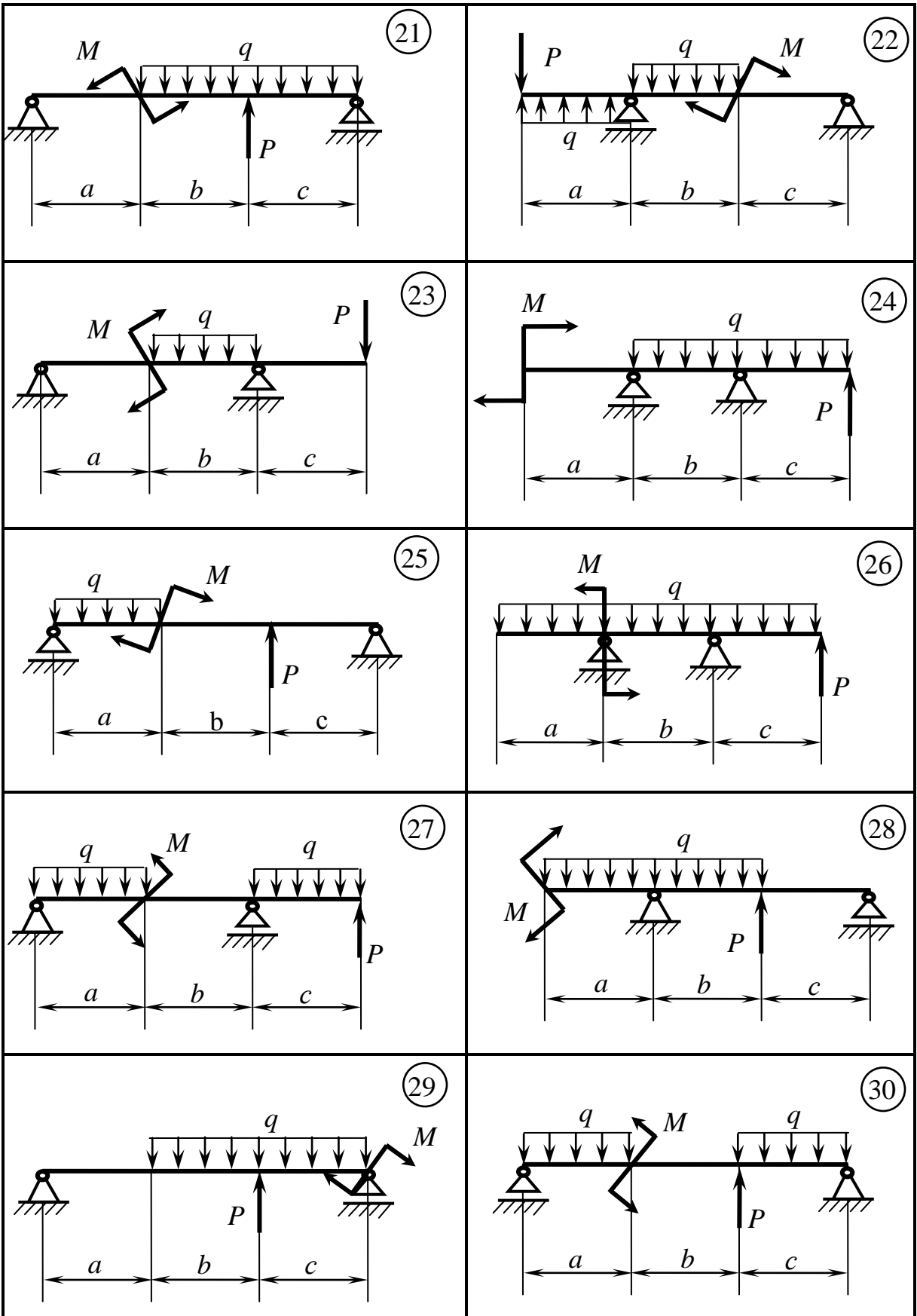


Рисунок 1.1, аркуш 3



5 Із сортаменту (додаток А) вибирається номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору, також його основні характеристики.

6 Перевіряється міцність балки за нормальними напруженнями відповідно до умови:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (1.2)$$

7 З аналізу епюри поперечних сил визначається максимальна поперечна сила  $Q_{\max}$ .

8 Перевіряється міцність балки за дотичними напруженнями відповідно до умови:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} \leq [\tau], \quad (1.3)$$

де  $S_x$  – статичний момент половини перерізу двотавра відносно осі  $x$  (рис. 1.2);

$d$  – ширина перерізу на осі  $x$ ;

$J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$ ;

$$[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma]. \quad (1.4)$$

9 Перевіряється міцність балки за еквівалентними напруженнями відповідно до умови:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\max} \leq [\sigma], \quad (1.5)$$

де  $\sigma_{\text{екв}}^{\max}$  – найбільше із значень еквівалентних напружень у точках  $K$  (див. рис. 1.2) усіх перерізів балки. Якщо в якомусь перерізі величини  $Q$  і  $M$  одночасно максимальні, то саме цей переріз і буде небезпечним з точки зору еквівалентних напружень. В інших, неочевидних випадках слід взяти до уваги перерізи, у яких:  $M = M_{\max}$  і  $Q = Q_{\max}$ ;  $M = M_{\max}$  і  $Q \neq Q_{\max}$ ;  $Q = Q_{\max}$  і  $M \neq M_{\max}$ ;  $M$  і  $Q$  хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Підрахунки еквівалентних напружень в точках  $K$  зазначених перерізів виконуються із застосуванням формул:

$$\sigma_K^{\text{екв}} = \sqrt{\sigma_K^2 + 3 \cdot \tau_K^2}; \quad (1.6)$$

$$\sigma_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K; \quad (1.7)$$

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S_x^*}{d \cdot J_x}, \quad (1.8)$$

де  $M$  і  $Q$  – відповідно згинальний момент і поперечна сила в кожному із зазначених перерізів;

$y_K$  – відстань від точки  $K$  до осі  $x$  (див. рис. 1.2):

$$y_K = \frac{h}{2} - t; \quad (1.9)$$

$S_x^*$  – статичний момент відносно осі  $x$  частини перерізу, яка розташована вище точки  $K$ :

$$S_x^* = 0,5 \cdot b \cdot t \cdot (h - t). \quad (1.10)$$

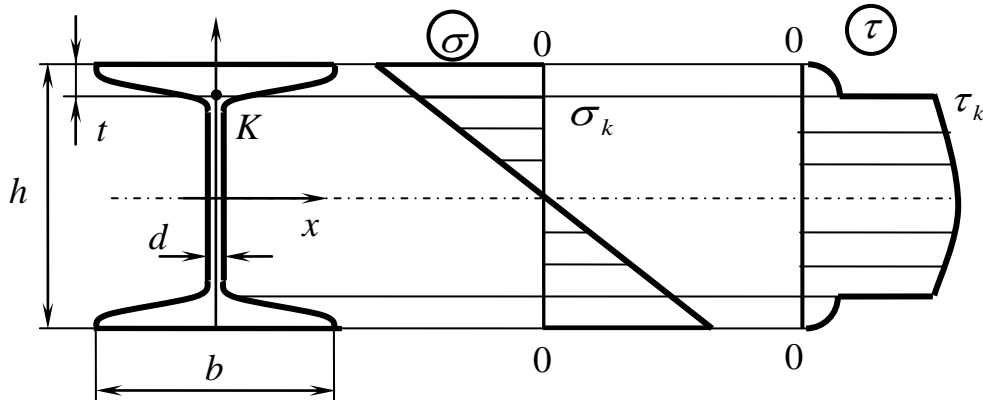


Рисунок 1.2 – Епюри нормальних ( $\sigma$ ) та дотичних ( $\tau$ ) напружень у поперечних перерізах балки

**При графічному способі** розв'язання задачі [ 5 ] дії 1...3 – такі самі, як і при аналітичному.

З додатку Б, у якому наведені параметри безпечних факторних просторів двотаврів, вибирається номер двотавра, у якого допустима величина згинального моменту  $[M]$  максимально наближена до  $M_{\max}$ :

$$[M] \geq M_{\max}. \quad (1.11)$$

У додатку В вибирається відповідний безпечний факторний простір і позначаються в ньому точки з координатами  $Q$  і  $M$ , які є величинами поперечних сил і згинальних моментів у кожному з характерних перерізів балки (рис. 1.3).

Якщо всі відмічені точки не виходять за межі безпечного факторного простору, міцність балки є повністю забезпеченою. В разі ж, коли хоча б одна точка лежить поза його межами, якась з умов міцності не виконується і даний номер двотавра не є прийнятним. Так, наприклад, у перерізі 1 деякої балки (див. точку 1 на рис. 1.3) не виконується умова міцності за нормальними напруженнями, в перерізі 2 – за дотичними, в перерізі 3 – за еквівалентними. В перерізах 4, 5 і 6 виконуються всі умови міцності.

У випадку невиконання хоча б однієї з умов міцності слід вибрати більший (наступний) номер двотавра і означену процедуру повторити.

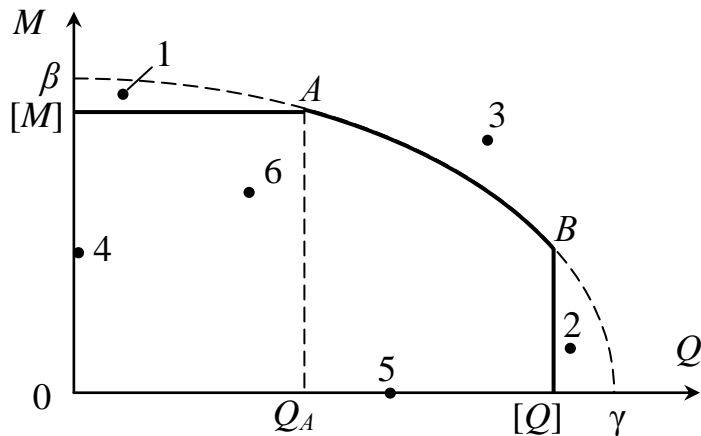


Рисунок 1.3 – Вигляд безпечного факторного простору двотаврів

## 1.2 Приклад розв'язання завдання 1

Схема балки зображена на рисунку 1.4. Розрахунки виконуємо відповідно до таких вихідних даних:  $q = 50$  кН/м;  $P = 55$  кН;  $M = 45$  кН·м;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $a = 2$  м;  $b = 0,8$  м;  $c = 0,6$  м.

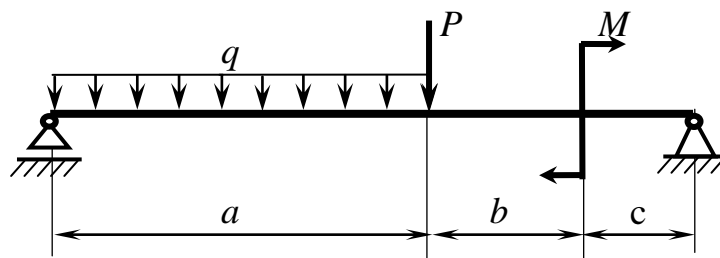


Рисунок 1.4 – Схема балки до прикладу розв'язання завдання 1

### Розв'язання

#### Аналітичний спосіб.

1 Визначаємо опорні реакції балки і позначаємо її характерні перерізи (рис. 1.5,а):

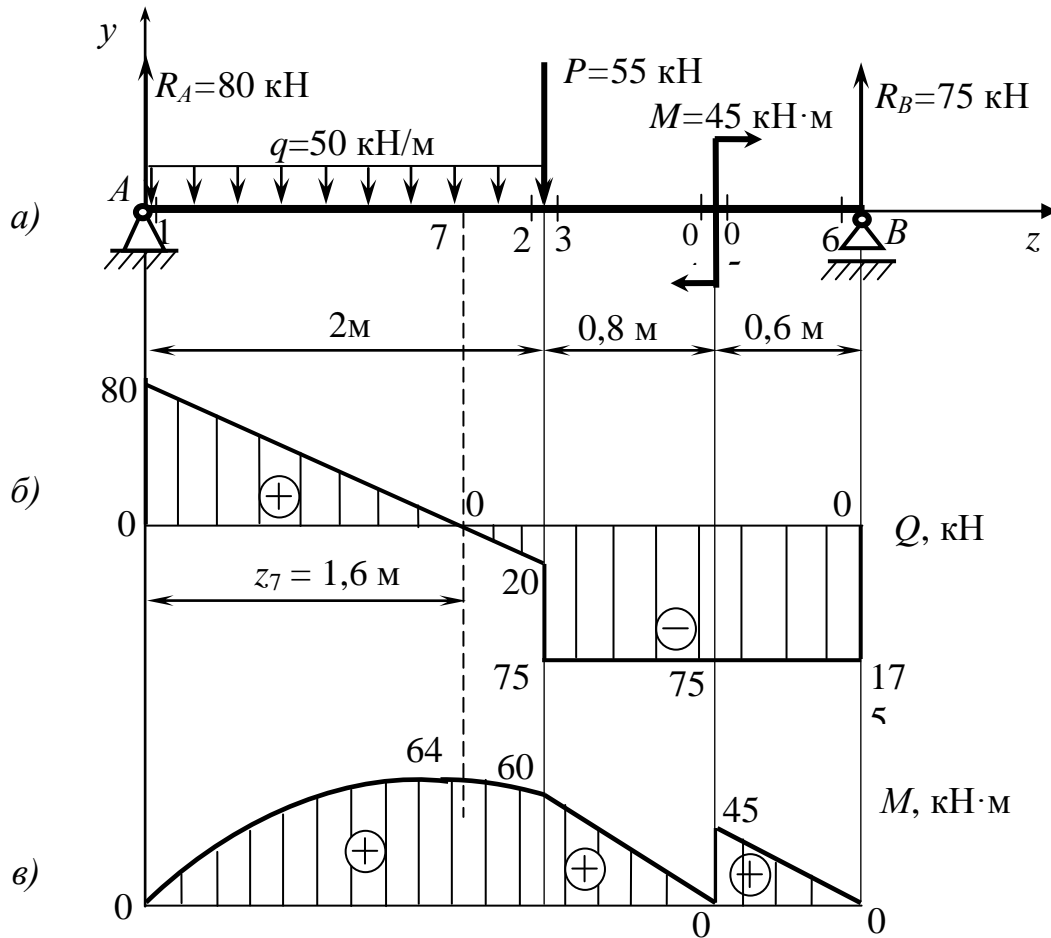
$$\sum m_A = -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 2 + M) = \frac{1}{3,4} \cdot (100 + 110 + 45) = 75 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = -R_A \cdot 3,4 + q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M) = \frac{1}{3,4} \cdot (240 + 77 - 45) = 80 \text{ кН.}$$

Перевірка:  $\sum P_y = R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 80 - 100 - 55 + 75 = 0$ .



*а – робоча схема балки; б – еюра поперечних сил;  
в – еюра згинальних моментів*

*Рисунок 1.5 – Графічні побудови до прикладу розв'язання завдання 1*

2 Будемо еюру поперечних сил (рис. 1.5,б):

$$Q_1 = R_A = 80 \text{ кН}; Q_2 = Q_1 - q \cdot 2 = 80 - 100 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 - P = -20 - 55 = -75 \text{ кН}; Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_3 = -75 \text{ кН};$$

$$z_7 = Q_1 : q = 80 : 50 = 1,6 \text{ м.}$$

3 Будемо еюру згинальних моментів (рис. 1.5,в):

$$M_1 = 0; M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 160 - 100 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = R_A \cdot 2,8 - q \cdot 2 \cdot 1,8 - P \cdot 0,8 =$$

$$= 224 - 180 - 44 = 0; M_5 = M_4 + M = 0 + 45 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -R_A \cdot 3,4 + q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M =$$

$$= -80 \cdot 3,4 + 50 \cdot 2 \cdot 2,4 + 55 \cdot 1,4 - 45 = -317 + 317 = 0;$$

$$M_7 = R_A \cdot z_7 - q \cdot z_7 \cdot \frac{z_7}{2} = 80 \cdot 1,6 - 50 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 128 - 64 = 64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Перевіряємо побудовані епюри шляхом їх побудови у зворотному напрямі.

Епюра поперечних сил:

$$Q_6 = Q_5 = Q_4 = Q_3 = -R_B = -75 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_3 + P = -75 + 55 = -20 \text{ кН}; \\ Q_1 = Q_2 + q \cdot 2 = -20 + 50 \cdot 2 = 80 \text{ кН}.$$

Епюра згинальних моментів:

$$M_6 = R_B \cdot 0 = 0; \quad M_5 = R_B \cdot 0,6 = 75 \cdot 0,6 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_4 = M_5 - M = 45 - 45 = 0; \\ M_3 = M_2 = R_B \cdot 1,4 - M = 75 \cdot 1,4 - 45 = 105 - 45 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_1 = R_B \cdot 3,4 - M - P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = \\ = 75 \cdot 3,4 - 45 - 55 \cdot 2 - 50 \cdot 2 \cdot 1 = 255 - 255 = 0; \\ M_7 = R_B \cdot (3,4 - z_7) - M - P \cdot (2 - z_7) - q \cdot (2 - z_7) \cdot \frac{(2 - z_7)}{2} = \\ = 75 \cdot 1,8 - 45 - 55 \cdot 0,4 - 50 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 135 - 45 - 22 - 4 = 64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Як бачимо, обидві епюри побудовані правильно, бо значення  $Q$  і  $M$  у всіх характерних перерізах при прямому і зворотному варіантах побудови повністю збігаються.

5 З умови міцності за нормальними напруженнями визначаємо потрібний осьовий момент опору перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{64 \cdot 10^3}{160} = 400 \text{ см}^3.$$

6 З відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) підбираємо потрібний номер двотавра.

Приймаємо двотавр 27а, у якого  $W_x = 407 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 5500 \text{ см}^4$ ;  $S_x = 229 \text{ см}^3$ ;  $h = 270 \text{ мм}$ ;  $b = 135 \text{ мм}$ ;  $d = 6,0 \text{ мм}$ ;  $t = 10,2 \text{ мм}$ .

7 Перевіряємо міцність балки за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{64 \cdot 10^6}{407 \cdot 10^3} = 157,248 \text{ МПа} < [\sigma],$$

Тож, міцність за нормальними напруженнями забезпечена.

Слід зауважити, що ця перевірка в даному випадку не є обов'язковою, бо переріз балки був обраний саме з умови міцності за нормальними напруженнями.

8 Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 55,515 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = [\tau]_{III} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma] = \frac{1}{2} \cdot 160 = 80 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} < [\tau].$$

Тож, міцність балки і за дотичними напруженнями забезпечена.

9 Визначаємо місце дії в балці максимальних еквівалентних напружень.

Аналіз побудованих епюр дозволяє вважати небезпечним з точки зору еквівалентних напружень переріз 3, в якому величини  $Q$  і  $M$  мають хоча і не максимальні, але близькі до них значення:  $Q = 75 \text{ кН}$ ,  $M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Найбільші еквівалентні напруження в цьому перерізі будуть діяти на рівні  $y = y_K$ , тобто  $\sigma_{\max}^{екв} = \sigma_K^{екв}$ .

10 З урахуванням місця дії максимальних еквівалентних напружень визначимо їх величину і перевіримо відповідну умову міцності:

$$\sigma_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K = \frac{60 \cdot 10^6}{5500 \cdot 10^4} \cdot 124,8 = 136,145 \text{ МПа};$$

$$\tau_K = \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left( S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) = \frac{75 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} \cdot \left( 229 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 124,8^2 \right) =$$

$$= 41,426 \text{ МПа};$$

$$\sigma_K^{екв} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4 \cdot \tau_K^2} = \sqrt{136,145^2 + 4 \cdot 41,426^2} = 159,374 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Тож, і за еквівалентними напруженнями міцність балки є забезпеченою.

### Графічний спосіб

При цьому способі розв'язання задачі перші три дії аналітичного способу (1 ... 3) повторюються.

Потім, з огляду на максимальне значення згинального моменту  $M_{\max} = 64 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , у додатку Б знаходимо номер двотавра, у якого значення  $[M]$  максимально наближене до  $M_{\max}$ .

Таким є двотавр 27а, у якого  $[M] = 65,110$  кН·м. Зображення його безпечного факторного простору, взяте з додатку В, з нанесеними на нього точками 1...7, координати яких дорівнюють значенням  $Q$  і  $M$  у відповідних перерізах балки, показано на рисунку 4.6.

Як видно з цього рисунку, ні одна з нанесених точок не виходить за межі безпечного факторного простору. Це означає, що у всіх позначених перерізах балки виконуються умови міцності за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями і вибір двотавра 27а є правильним.

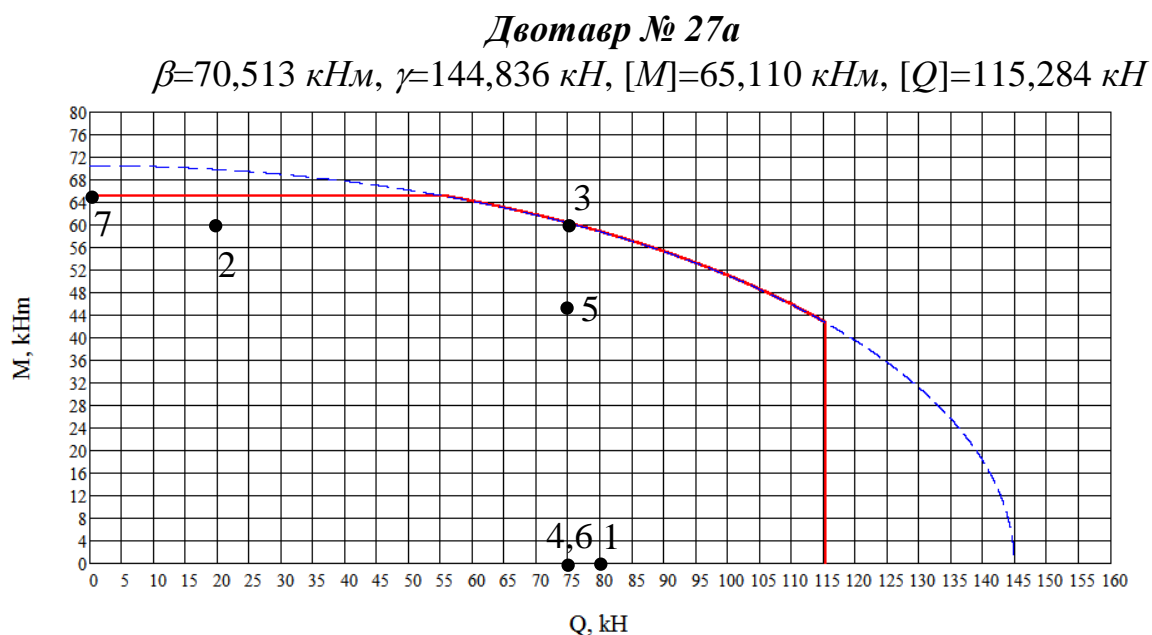


Рисунок 1.6 – Результати графічного розрахунку

## 2 ПЕРЕМІЩЕННЯ В БАЛКАХ

Для заданої сталеві балки побудувати епюри внутрішніх зусиль і підібрати переріз (двотавр), якщо  $[\sigma] = 160$  МПа. Визначити вертикальне і кутове переміщення перерізу  $K$ . Вихідні дані вибрати із таблиць 2.1 та 2.2 і рисунка 2.1.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до завдання 2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M$ , кН·м	8	10	12	14	16	8	10	12	14	16
$P$ , кН	20	18	16	12	14	18	20	14	16	12
$q$ , кН/м	14	12	10	8	6	12	14	8	6	10

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до завдання 2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>a</i>	1	1,5	2	2,5	3	1	1,5	2	2,5	3
<i>b</i>	3	2	2,5	1,5	1	2	3	1,5	1	2,5
<i>c</i>	2,5	1	1,5	3	2	3	2,5	1	1,5	2
<i>d</i>	2	2,5	3	1	1,5	2,5	1	3	2	1,5

## 2.1 Методичні вказівки до виконання завдання 2

Розв’язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Визначаються опорні реакції балки від заданого навантаження і будуються епюри поперечних сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$ .

2 З аналізу епюри  $M$  визначається максимальний за модулем згинальний момент у балці –  $M_{\max}$ .

3 З умови міцності за нормальними напруженнями визначається потрібний осьовий момент опору перерізу балки –  $W_x$  (див. формулу 1.1).

4 Із сортаменту (див. додаток А) вибирається номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору.

5 Вертикальне і кутове переміщення перерізу  $K$  балки визначаються за методом Мора.

6 Для визначення шуканого вертикального переміщення (прогину  $\delta_K$ ) в місці розташування перерізу  $K$  до балки прикладається одинична сила  $P = 1$ , визначаються від її дії опорні реакції і будується відповідна епюра згинальних моментів  $\bar{M}_1$ .

7 Величина  $\delta_K$  визначається за формулою крайніх ординат (додаток Г) шляхом “перемноження” епюр згинальних моментів від заданого навантаження –  $M$  і одиничної сили –  $\bar{M}_1$ :

$$\delta_K = M \times \bar{M}_1. \quad (2.2)$$

8 Для визначення кутового переміщення (кута повороту  $\theta_K$ ) в місці розташування перерізу  $K$  до балки прикладається одиничний момент  $M = 1$ , визначаються від його дії опорні реакції і будується відповідна епюра згинальних моментів  $\bar{M}_2$ .



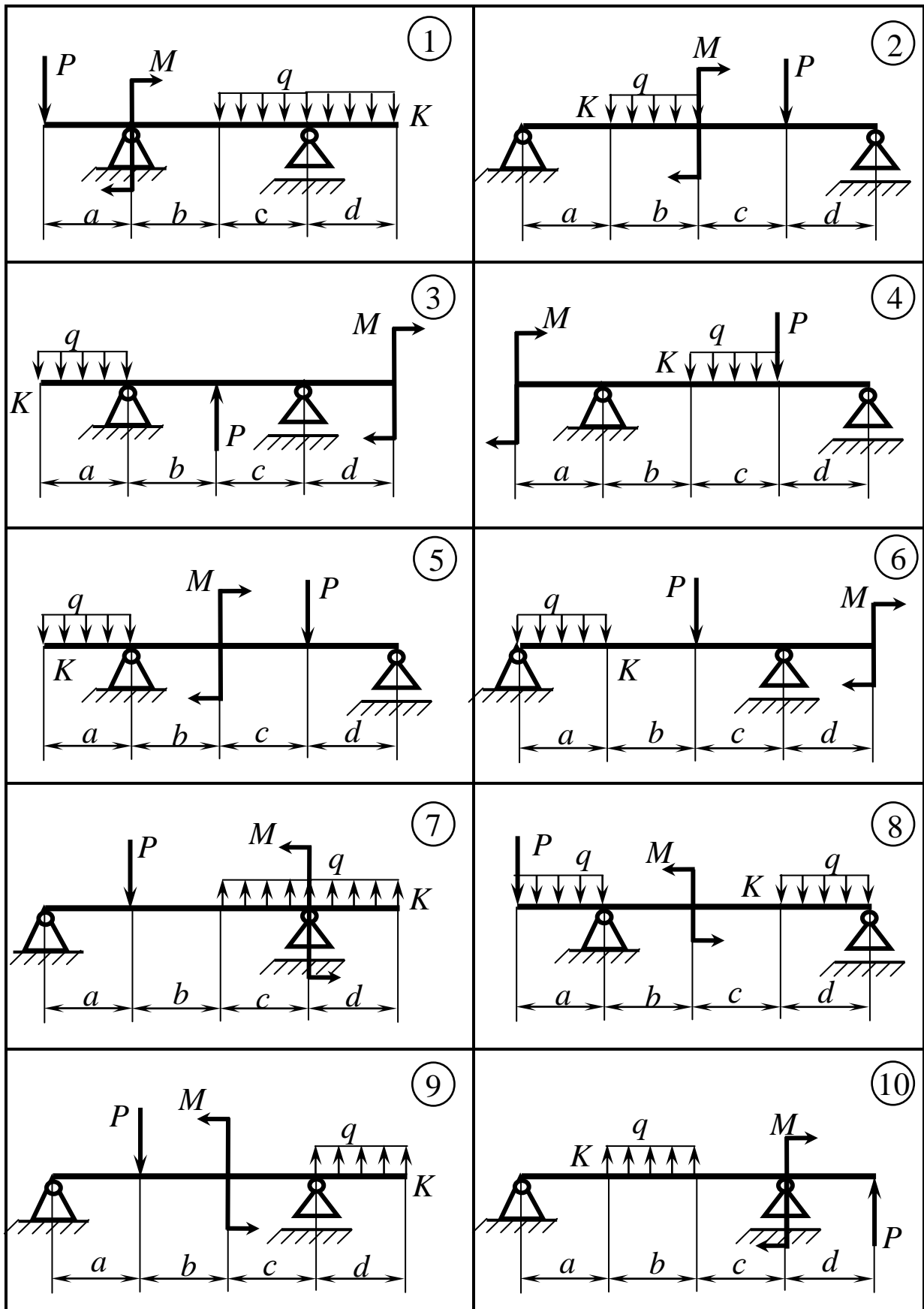


Рисунок 2.1 – Схеми балок до завдання 2

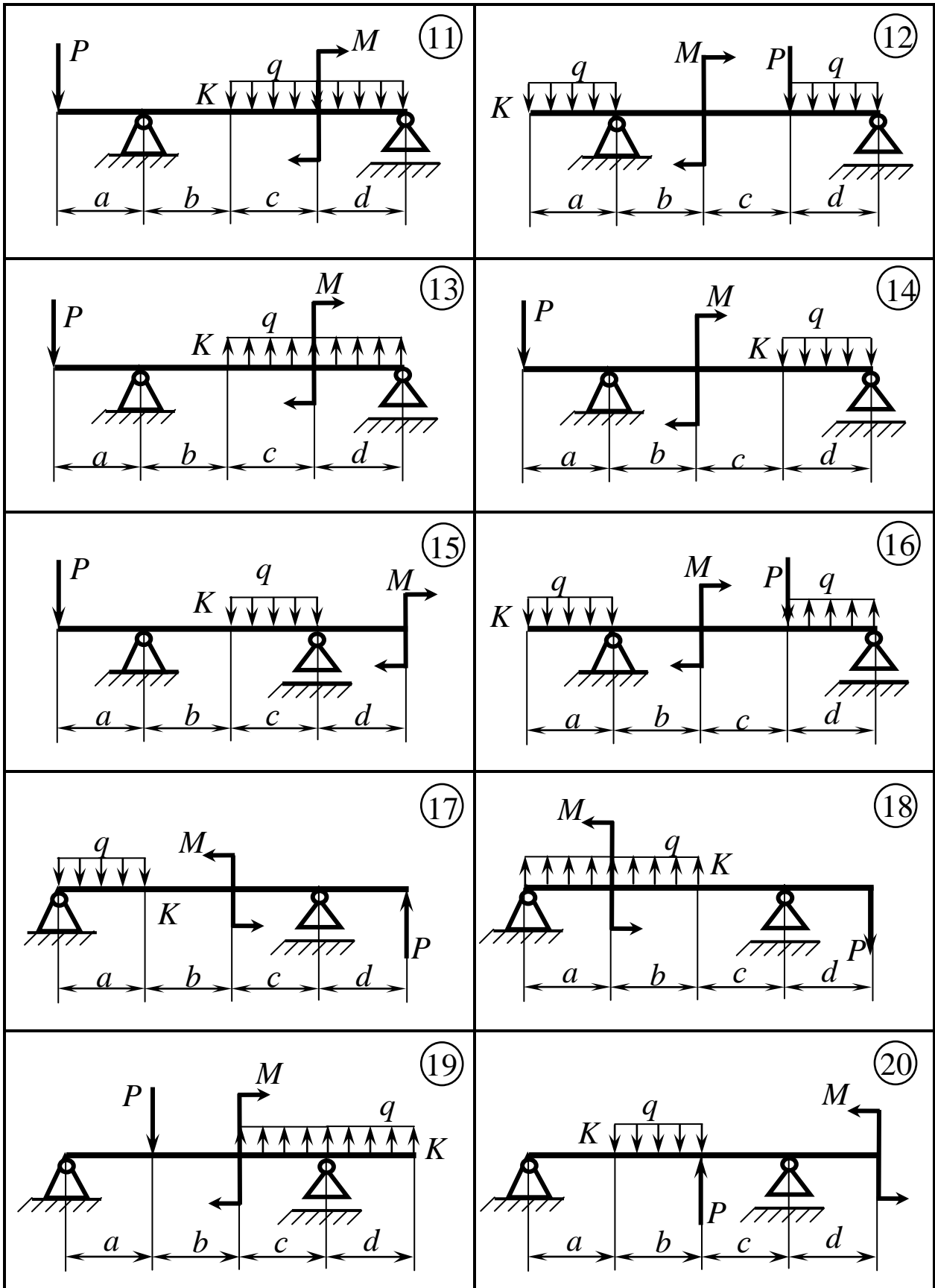


Рисунок 2.1, аркуш 2

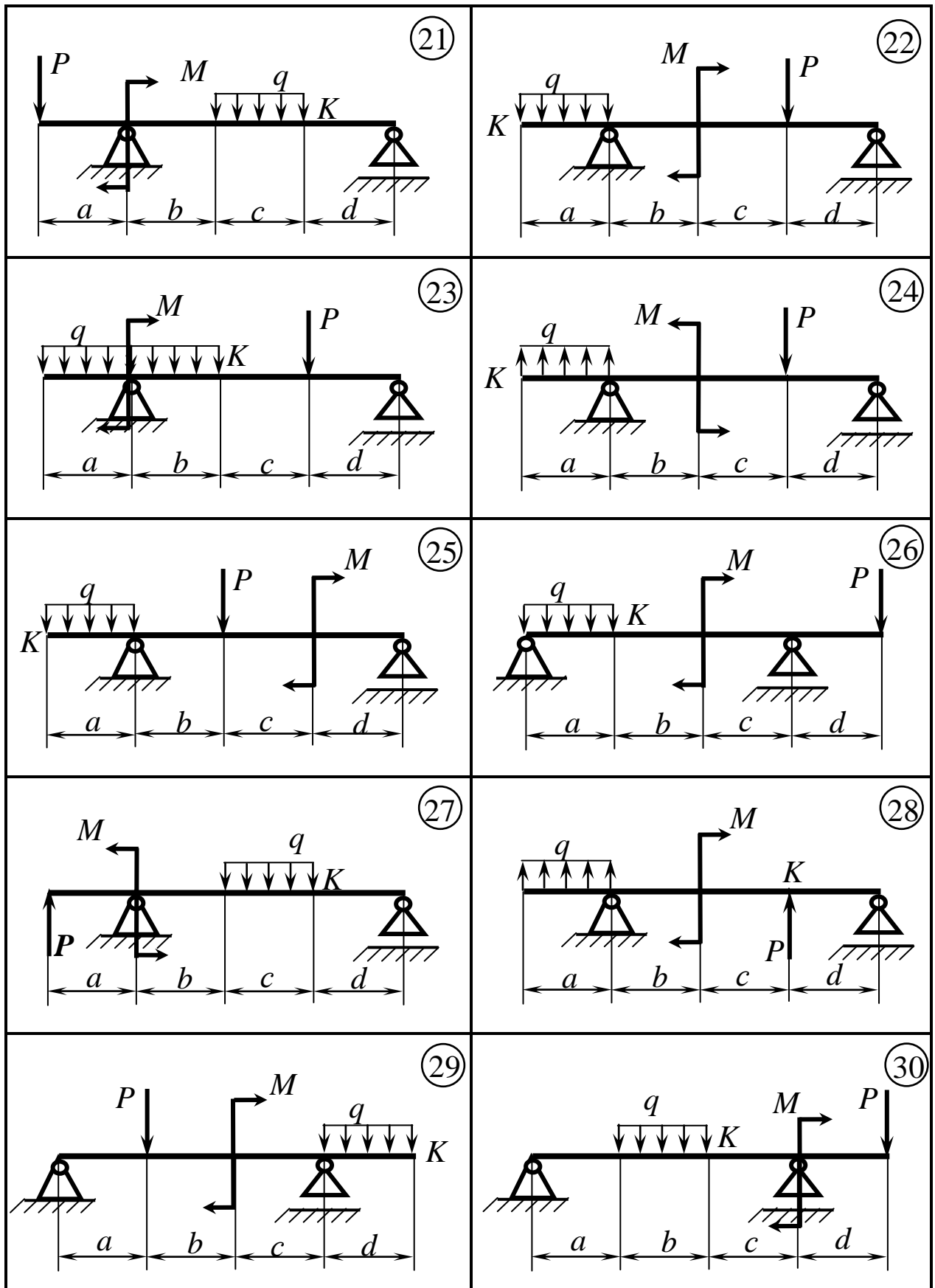


Рисунок 2.1, аркуш 3

9 Величина  $\theta_K$  визначається за формулою крайніх ординат шляхом “перемноження” епюр згинальних моментів від заданого навантаження –  $M$  і одиничного моменту –  $\bar{M}_2$ :

$$\theta_K = M \times \bar{M}_2. \quad (2.3)$$

## 2.2 Приклад розв’язання завдання 2

Схема балки зображена на рисунку 2.2. Розрахунки виконуємо відповідно до таких вихідних даних:  $q = 10$  кН/м;  $P = 15$  кН;  $M = 20$  кН·м;  $a = 2$  м;  $b = 1$  м;  $c = 2$  м;  $d = 1$  м.

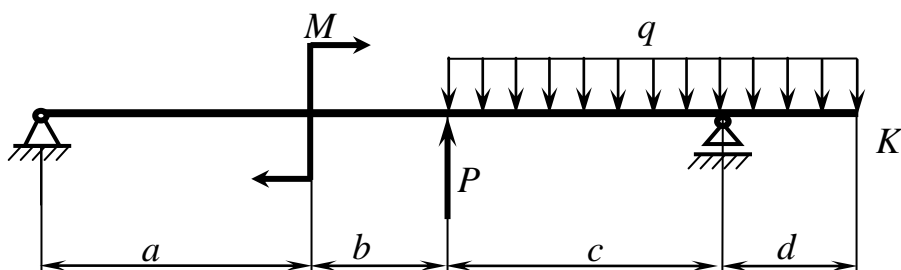


Рисунок 2.2 – Схема балки до прикладу розв’язання завдання 2

### Розв’язання

1 Визначаємо опорні реакції балки (рис. 2.3,а):

$$\sum m_A = -M + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 4 + R_B \cdot 5 - q \cdot 1 \cdot 5,5 = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{5} \cdot (M - P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4 + q \cdot 1 \cdot 5,5) = \frac{1}{5} \cdot (20 - 45 + 80 + 55) = 22 \text{ кН};$$

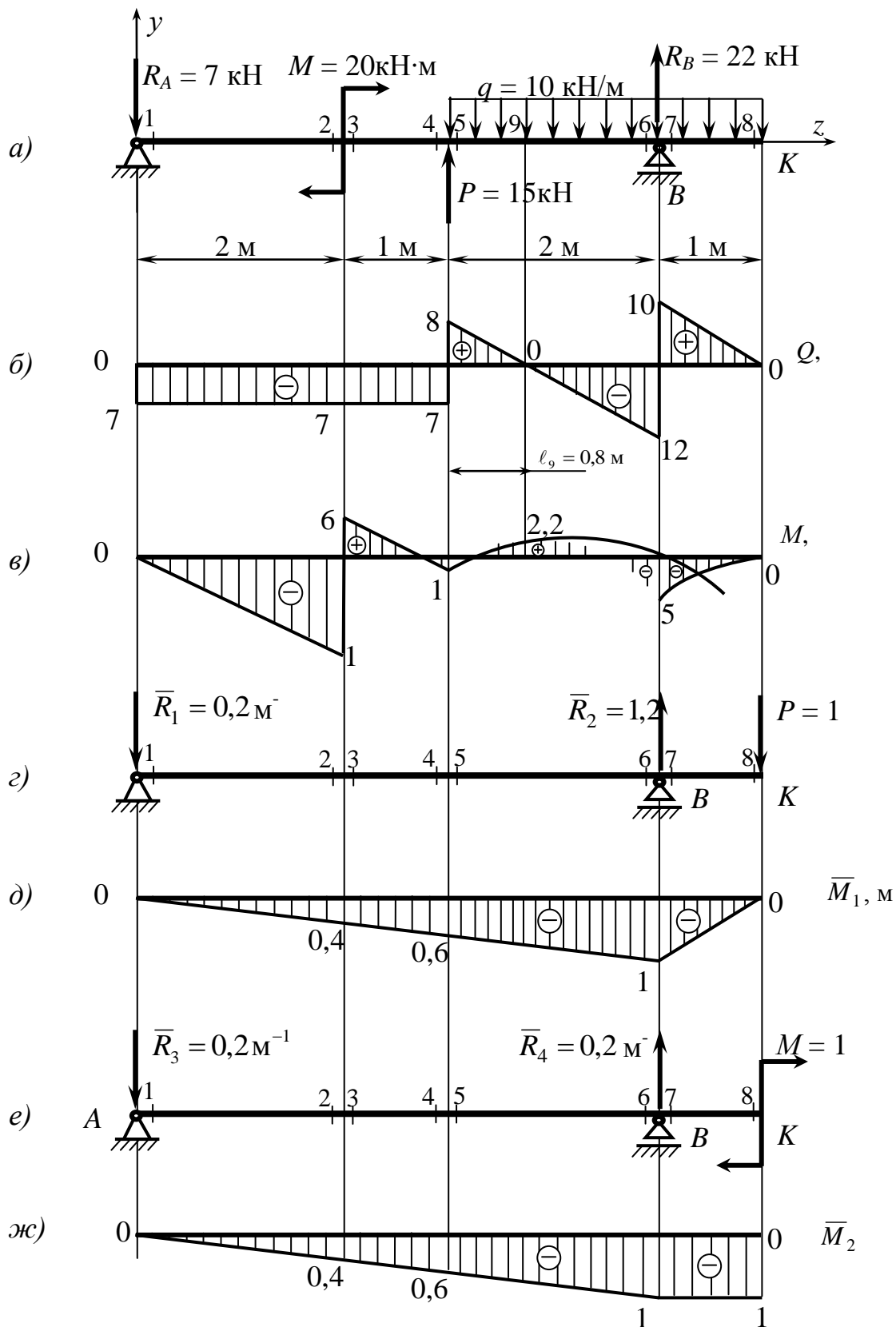
$$\sum m_B = -M - P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 + R_A \cdot 5 = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{5} \cdot (M + P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 0,5) = \frac{1}{5} \cdot (20 + 30 - 20 + 5) = 7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -R_A + P - q \cdot 2 + R_B - q \cdot 1 = -7 + 15 - 20 + 22 - 10 = -37 + 37 = 0.$$

Таким чином, реакції визначені правильно.



а – робоча схема балки; б,в – епюри поперечних сил і згинальних моментів;  
 г,д,е,ж – опорні реакції і згинальні моменти від одиничних силових факторів

Рисунок 2.3 – Графічні побудови до прикладу розв'язання завдання 2

2 Будуємо епюру поперечних сил (рис. 2.3,б):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = -R_A = -7 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4 + P = -7 + 15 = 8 \text{ кН};$$

$$Q_6 = Q_5 - q \cdot 2 = 8 - 20 = -12 \text{ кН}; \quad Q_7 = Q_6 + R_B = -12 + 22 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_8 = Q_7 - q \cdot 1 = 10 - 10 = 0; \quad \ell_9 = \frac{Q_5}{q} = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ м.}$$

3 Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 2.3,в):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -R_A \cdot 2 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_2 + M = -14 + 20 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M_5 = -R_A \cdot 3 + M = -21 + 20 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = M_7 = -R_A \cdot 5 + M + P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -7 \cdot 5 + 20 + 15 \cdot 2 -$$

$$-10 \cdot 2 \cdot 1 = -35 + 20 + 30 - 20 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_8 = -R_A \cdot 6 + M + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 + R_B \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 =$$

$$= -7 \cdot 6 + 20 + 15 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 2 + 22 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5 =$$

$$= -42 + 20 + 45 - 40 + 22 - 5 = -87 + 87 = 0;$$

$$M_9 = -R_A \cdot (3 + \ell_9) + M + P \cdot \ell_9 - q \cdot \ell_9 \cdot \frac{\ell_9}{2} =$$

$$= -7 \cdot 3,8 + 20 + 15 \cdot 0,8 - 10 \cdot 0,8 \cdot 0,4 = -26,6 + 20 + 12 - 3,2 =$$

$$= -29,8 + 32 = 2,2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

4 Перевіряємо побудовані епюри шляхом їх побудови у зворотному напрямі.

Епюра поперечних сил:

$$Q_8 = 0; \quad Q_7 = q \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН}; \quad Q_6 = Q_7 - R_B = 10 - 22 = -12 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_6 + q \cdot 2 = -12 + 10 \cdot 2 = 8 \text{ кН}; \quad Q_4 = Q_3 = Q_2 = Q_1 = Q_5 - P =$$

$$= 8 - 15 = -7 \text{ кН.}$$

Епюра згинальних моментів:

$$M_8 = 0; \quad M_7 = M_6 = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -10 \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 = -q \cdot 1 \cdot 2,5 + R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -10 \cdot 1 \cdot 2,5 + 22 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= -25 + 44 - 20 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = -q \cdot 1 \cdot 3,5 + R_B \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 + P \cdot 1 =$$

$$= -10 \cdot 1 \cdot 3,5 + 22 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = -35 + 66 - 40 + 15 = -75 + 81 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = M_3 - M = 6 - 20 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1 = R_B \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 4,5 + P \cdot 3 - M =$$

$$= 22 \cdot 5 - 10 \cdot 3 \cdot 4,5 + 15 \cdot 3 - 20 = 110 - 135 + 45 - 20 = 145 - 145 = 0;$$

$$M_9 = -q \cdot 1 \cdot (0,5 + 2 - \ell_9) + R_B \cdot (2 - \ell_9) - q \cdot (2 - \ell_9) \cdot \frac{(2 - \ell_9)}{2} =$$

$$= -10 \cdot 1 \cdot 1,7 + 22 \cdot 1,2 - 10 \cdot 1,2 \cdot 0,6 = -17 + 26,4 - 7,2 = -24,2 + 26,4 = 2,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Як бачимо, обидві епюри побудовані правильно, бо значення  $Q$  і  $M$  у всіх характерних перерізах при прямому і зворотному варіантах побудови повністю збігаються.

5 Підбираємо потрібний номер двотавра:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{14 \cdot 10^3}{160} = 87,5 \text{ см}^3.$$

Найближче до визначеної величини осьового моменту опору має двотавр 16, у якого  $W_x = 109 \text{ см}^3$ ,  $J_x = 873 \text{ см}^4$  (див. додаток А). Його і приймаємо для подальших розрахунків.

6 Визначаємо опорні реакції балки від дії одиничної сили  $P=1$ , прикладеної в перерізі  $K$  (рис. 2.3,з):

$$\sum m_A = \bar{R}_2 \cdot 5 - P \cdot 6 = 0; \quad \bar{R}_2 = \frac{P \cdot 6}{5} = \frac{1 \cdot 6}{5} = 1,2;$$

$$\sum m_B = \bar{R}_1 \cdot 5 - P \cdot 1 = 0; \quad \bar{R}_1 = \frac{P \cdot 1}{5} = \frac{1 \cdot 1}{5} = 0,2.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -\bar{R}_1 + \bar{R}_2 - P = -0,2 + 1,2 - 1 = 0.$$

Таким чином, реакції визначені правильно.

7 Будуємо епюру згинальних моментів  $\bar{M}_1$  від дії на балку одиничної сили (рис. 2.3,д):

$$M_1 = M_8 = 0; \quad M_2 = M_3 = -\bar{R}_1 \cdot 2 = -0,2 \cdot 2 = -0,4 \text{ м};$$

$$M_4 = M_5 = -\bar{R}_1 \cdot 3 = -0,2 \cdot 3 = -0,6 \text{ м};$$

$$M_6 = M_7 = -\bar{R}_1 \cdot 5 = -0,2 \cdot 5 = -1 \text{ м}.$$

8 Визначаємо опорні реакції балки від дії одиничного моменту, прикладеного в перерізі  $K$  (рис. 2.3,е):

$$\sum m_A = \bar{R}_4 \cdot 5 - M = 0; \quad \bar{R}_4 = \frac{M}{5} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ м}^{-1};$$

$$\sum m_B = \bar{R}_3 \cdot 5 - M = 0; \quad \bar{R}_3 = \frac{M}{5} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ м}^{-1}.$$

Перевірка:  $\sum P_y = -\bar{R}_3 + \bar{R}_4 = -0,2 + 0,2 = 0.$

Таким чином, реакції визначені правильно.

9 Будуємо епюру згинальних моментів  $\bar{M}_2$  від дії на балку одиничного моменту (рис. 2.3,ж):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = -\bar{R}_3 \cdot 2 = -0,2 \cdot 2 = -0,4;$$

$$M_4 = M_5 = -\bar{R}_3 \cdot 3 = -0,2 \cdot 3 = -0,6; \quad M_6 = M_7 = M_8 = -M = -1.$$

10 Визначаємо вертикальне переміщення перерізу  $K$  балки:

$$\begin{aligned} \delta_K &= M \times \bar{M}_1 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-14) \cdot (-0,4) + 0 \cdot (-0,4) + (-14) \cdot 0] + \\ &+ \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 6 \cdot (-0,4) + 2 \cdot (-1) \cdot (-0,6) + 6 \cdot (-0,6) + (-1) \cdot (-0,4)] + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-1) \cdot (-0,6) + 2 \cdot (-5) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-5) \cdot (-0,6)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-0,6 - 1) + \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 1^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-1 + 0) = \frac{22,4}{6E \cdot J_x} - \frac{6,8}{6E \cdot J_x} + \frac{30,4}{6E \cdot J_x} - \frac{128}{24E \cdot J_x} + \frac{10}{6E \cdot J_x} - \frac{10}{24E \cdot J_x} = \\ &= \frac{3,583}{E \cdot J_x} = \frac{3,583 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4} = 2,05 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз  $K$  переміщується за напрямком одиничної сили, тобто униз.

11 Визначаємо кутове переміщення (кут повороту) перерізу  $K$  балки:

$$\begin{aligned} \theta_K &= M \times \bar{M}_2 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-14) \cdot (-0,4) + 0 \cdot (-0,4) + (-14) \cdot 0] + \\ &+ \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 6 \cdot (-0,4) + 2 \cdot (-1) \cdot (-0,6) + 6 \cdot (-0,6) + (-1) \cdot (-0,4)] + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-1) \cdot (-0,6) + 2 \cdot (-5) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-5) \cdot (-0,6)] + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-0,6 - 1) + \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)] + \\
& + \frac{10 \cdot 1^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-1 - 1) = \frac{22,4}{6E \cdot J_1} - \frac{6,8}{6E \cdot J_x} + \frac{30,4}{6E \cdot J_x} - \frac{128}{24E \cdot J_x} + \frac{15}{6E \cdot J_x} - \frac{20}{24E \cdot J_x} = \\
& = \frac{4}{E \cdot J_x} = \frac{4 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4} = 0,002 \text{ радіана} = 0,114 \text{ градуса.}
\end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз  $K$  обертається за напрямком одиничного моменту, тобто за ходом стрілок годинника.

### 3 ПЕРЕМІЩЕННЯ В ПЛОСКИХ РАМАХ

Для заданої сталеві рами побудувати епюри внутрішніх зусиль і підібрати переріз (двотавр), якщо  $[\sigma] = 160$  МПа. Визначити переміщення рухомої опори рами і кут повороту перерізу  $K$ . Вихідні дані вибрати із таблиць 2.1 та 2.2 і рисунка 3.1.

#### 3.1 Методичні вказівки до виконання завдання 3

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Визначаються опорні реакції рами від заданого навантаження і будуються епюри подовжніх сил  $N$ , поперечних сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$ .

2 З аналізу епюри  $M$  визначається максимальний за модулем згинальний момент у стрижнях рами –  $M_{\max}$ .

3 За величиною  $M_{\max}$  визначається потрібний осьовий момент опору перерізу стрижнів –  $W_x$  (див. формулу 1.1).

4 Із сортаменту (див. додаток А) вибирається номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору.

5 Переміщення рухомої опори рами і кута повороту перерізу  $K$  визначаються за методом Мора.

6 Для визначення шуканого переміщення рухомої опори ( $\delta$ ) до неї прикладається в напрямку можливого руху одинична сила  $P = 1$ , визначаються опорні реакції рами від дії цієї сили і будується відповідна епюра згинальних моментів  $\bar{M}_1$ . Величина  $\delta$  визначається за формулою крайніх ординат (див. додаток Г) шляхом “перемноження” епюри згинальних моментів від заданого навантаження –  $M$  і епюри  $\bar{M}_1$  (див. формулу 2.1).

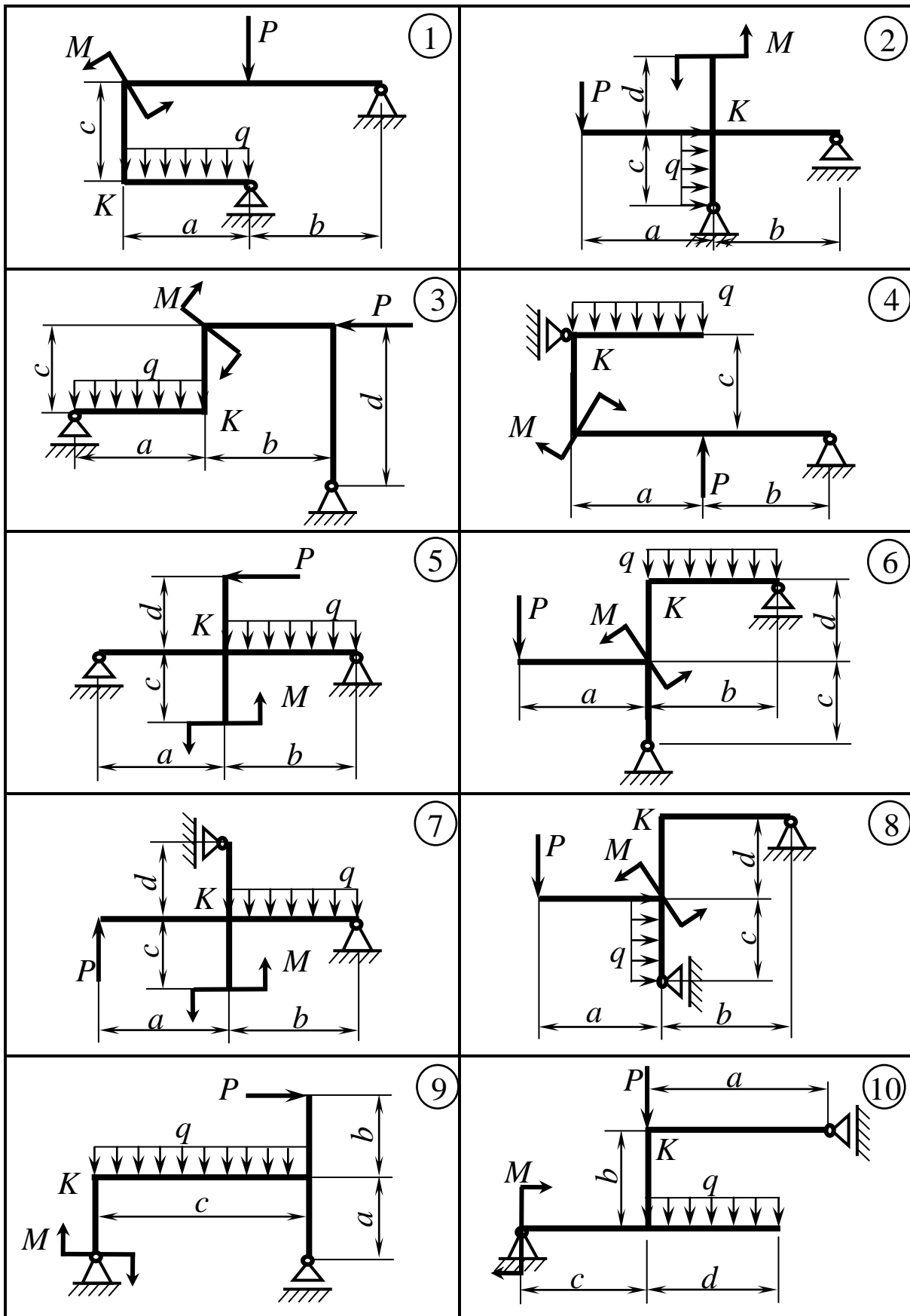


Рисунок 3.1 – Схеми рам до завдання 3

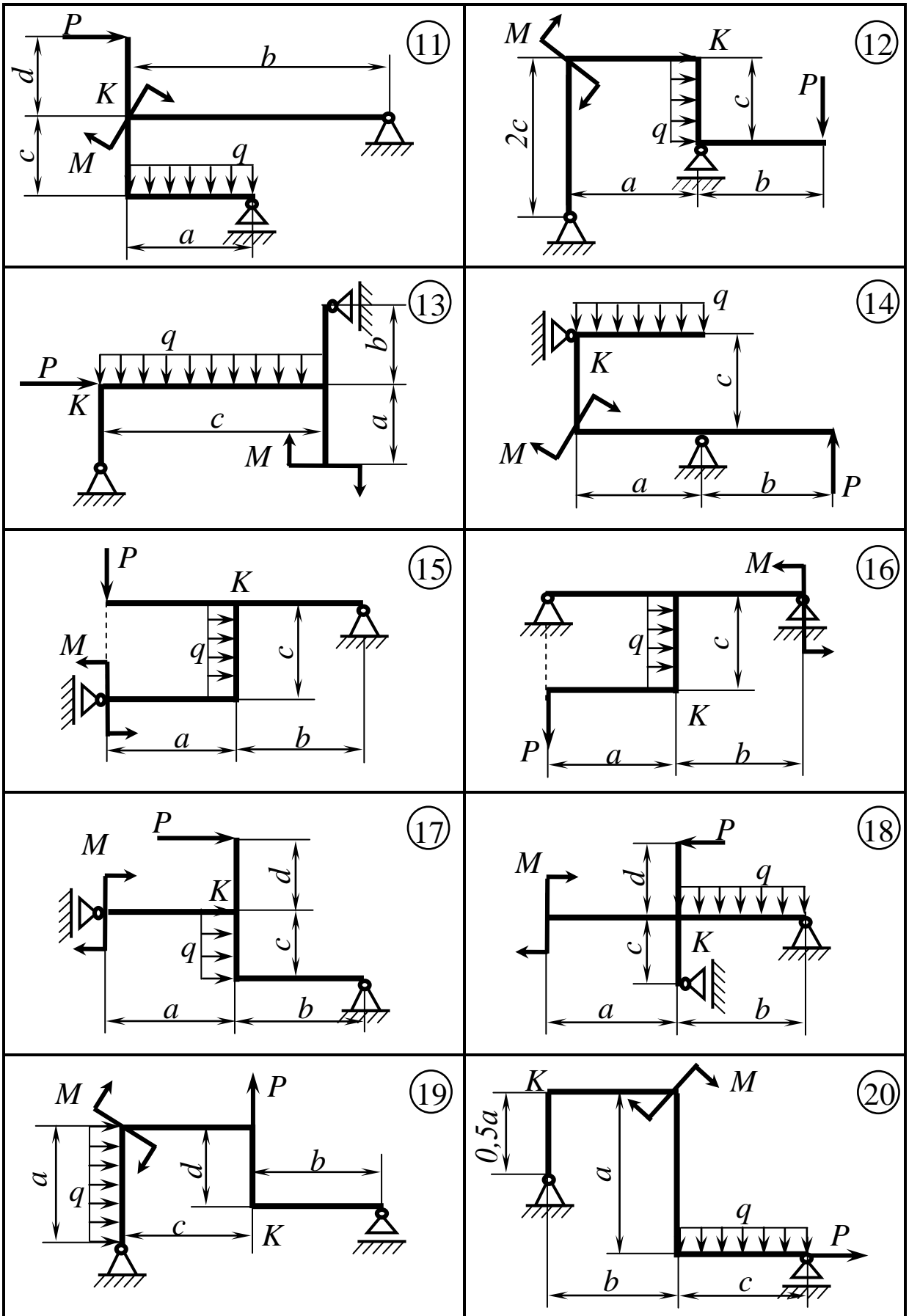


Рисунок 3.1, аркуш 2

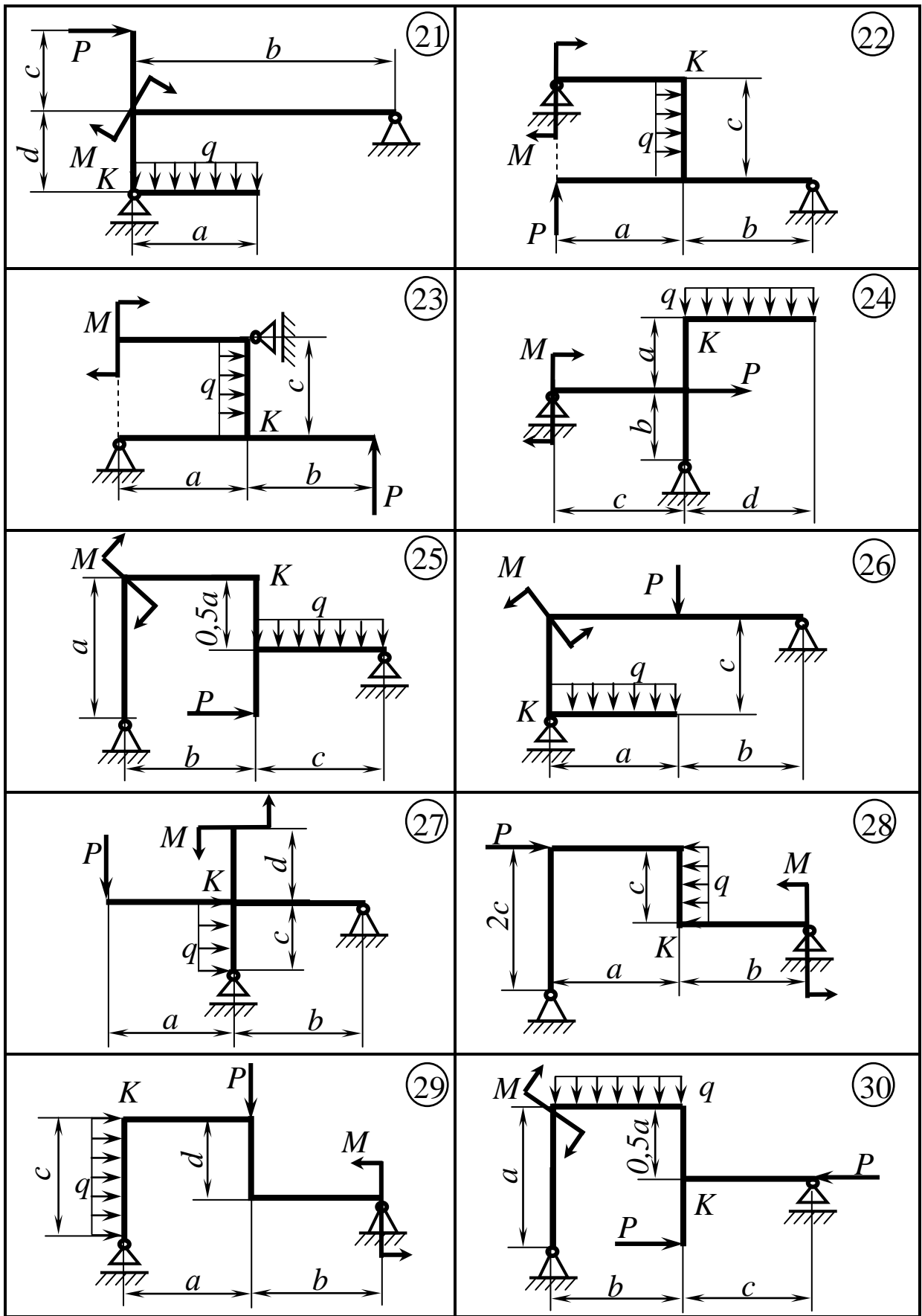


Рисунок 3.1, аркуш 3

7 Для визначення шуканого кута повороту вузла  $K$  ( $\theta_K$ ) у цьому вузлі прикладається одиничний момент  $M = 1$ , визначаються від його дії опорні реакції рами і будується відповідна епюра згинальних моментів  $\bar{M}_2$ . Величина  $\theta_K$  визначається за формулою крайніх ординат шляхом “перемноження” епюри згинальних моментів від заданого навантаження –  $M$  і епюри  $\bar{M}_2$  (див. формулу 2.2).

### 3.2 Приклад 1 розв’язання завдання 3

Схема рами зображена на рисунку 3.2. Розрахунки виконуємо відповідно до таких вихідних даних:  $q = 10$  кН/м;  $P = 12$  кН;  $M = 9$  кН·м;  $a = 2$  м;  $b = 3$  м;  $c = 1$  м.

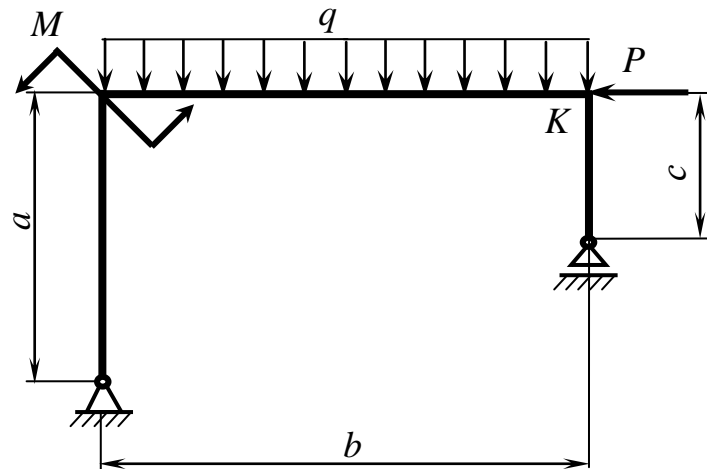


Рисунок 3.2 – Схема рами до прикладу 1 розв’язання завдання 3

#### Розв’язання

1 Визначаємо опорні реакції рами (рис. 3.3):

$$\begin{aligned} \sum m_A &= M - q \cdot 3 \cdot 1,5 + P \cdot 2 + R_B \cdot 3 = 0; \\ R_B &= \frac{1}{3} \cdot (-M + q \cdot 3 \cdot 1,5 - P \cdot 2) = \frac{1}{3} \cdot (-9 + 45 - 24) = 4 \text{ кН.} \\ \sum P_y &= Y_A - q \cdot 3 + R_B = 0; \quad Y_A = q \cdot 3 - R_B = 30 - 4 = 26 \text{ кН.} \\ \sum P_z &= Z_A - P = 0; \quad Z_A = P = 12 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum m_K = -Y_A \cdot 3 + Z_A \cdot 2 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 = -78 + 24 + 9 + 45 = -78 + 78 = 0.$$

Таким чином, реакції визначені правильно.

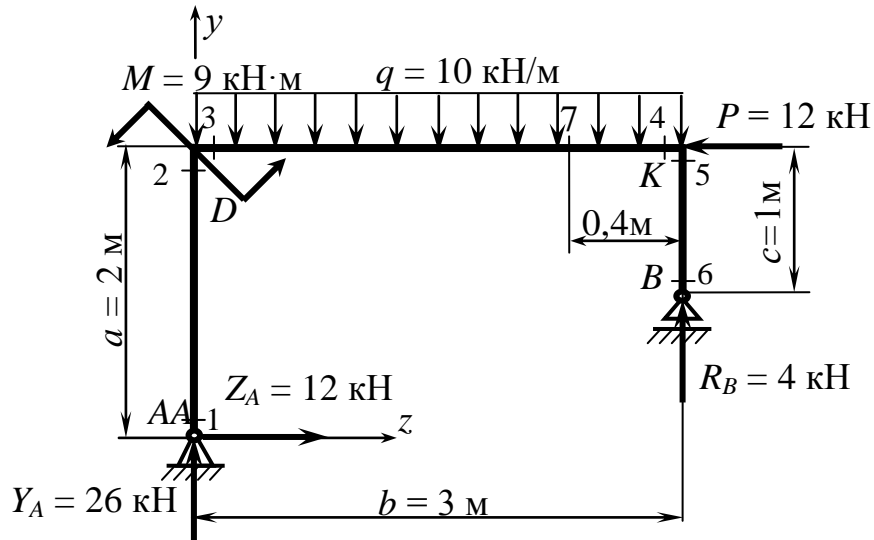


Рисунок 3.3 – Робоча схема рами

2 Будуємо епюру подовжніх сил (рис. 3.4,а):

$$N_1 = N_2 = -Y_A = -26 \text{ кН}; \quad N_3 = N_4 = -P = -12 \text{ кН}; \\ N_5 = N_6 = -R_B = -4 \text{ кН}.$$

3 Будуємо епюру поперечних сил (рис. 3.4, б):

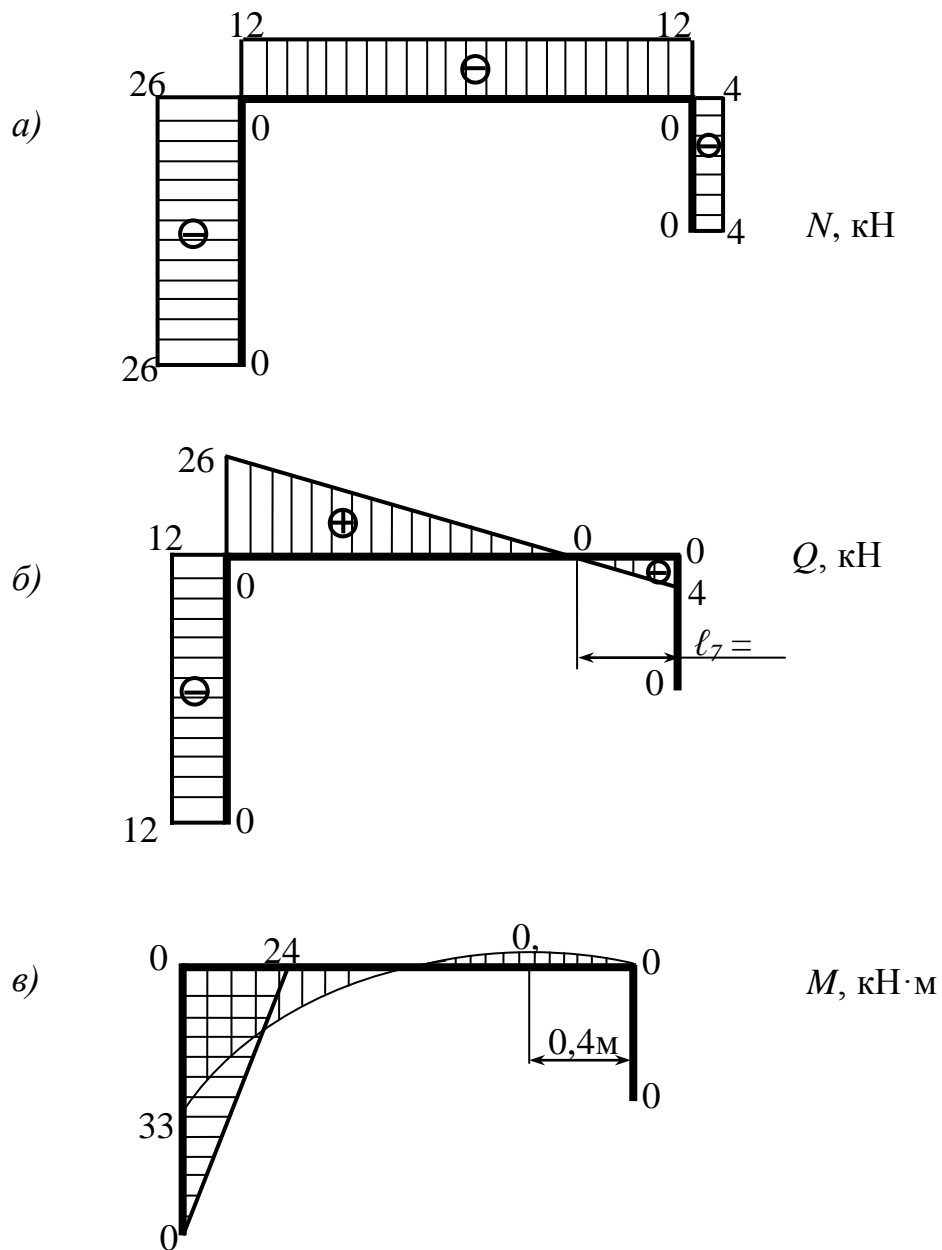
$$Q_1 = Q_2 = -Z_A = -12 \text{ кН}; \quad Q_3 = Y_A = 26 \text{ кН}; \quad Q_4 = -R_B = -4 \text{ кН}; \\ Q_5 = Q_6 = 0; \quad \ell_7 = R_B : q = 4 : 10 = 0,4 \text{ м}.$$

4 Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 3.4,в):

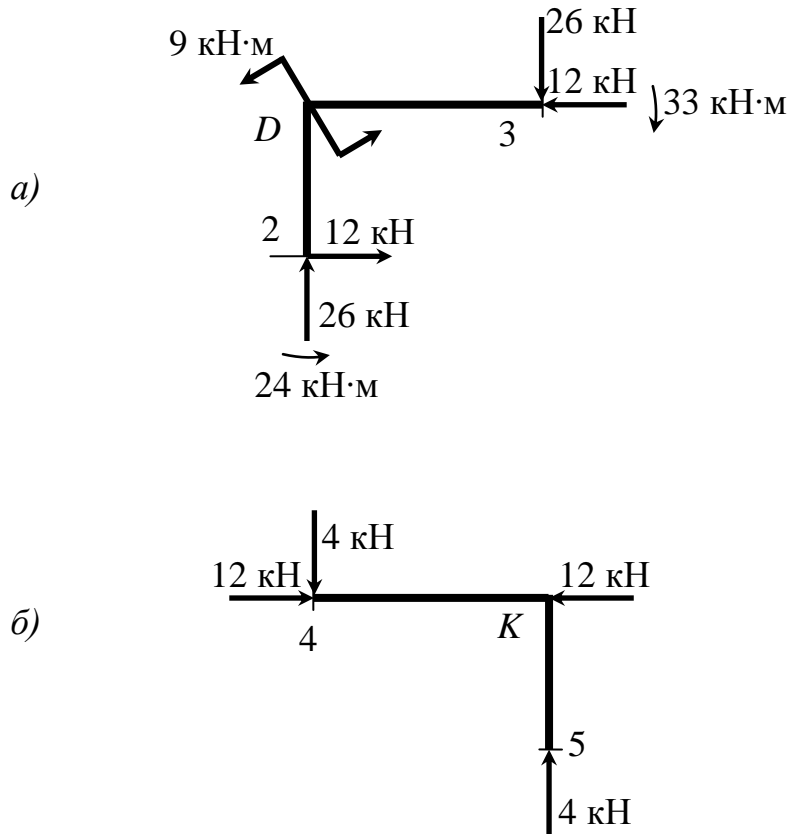
$$M_1 = 0; \quad M_2 = Z_A \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_2 + M = 24 + 9 = 33 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_4 = M_5 = M_6 = R_B \cdot 0 = 0; \quad M_7 = R_B \cdot \ell_7 - q \cdot \ell_7 \cdot \frac{\ell_7}{2} = 4 \cdot 0,4 - 10 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = \\ = 1,6 - 0,8 = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Перевіряємо правильність побудованих епюр шляхом аналізу умов рівноваги вузлів D і K рами.

З рисунків 3.5,а і 3.5,б бачимо, що системи сил, діючих на кожен з означених вузлів як на тверде тіло, перебувають у рівновазі по вертикалі й горизонталі, також моментно відносно вузлових точок D і K. Це вказує на правильність виконаних побудов.



*а, б – епюри подовжніх і поперечних сил; в – епюра згинальних моментів  
Рисунок 3.4 – Епюри внутрішніх зусиль рами*



*a – вузол D; б – вузол K*

*Рисунок 3.5 – Системи сил, що діють на вузли рами*

6 Підбираємо потрібний номер двотавра для стрижнів рами:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{33 \cdot 10^3}{160} = 206,25 \text{ см}^3.$$

Найближче до визначеної величини осевого моменту опору має двотавр 22, у якого  $W_x = 232 \text{ см}^3$ ,  $J_x = 2550 \text{ см}^4$  (див. додаток А). Його і приймаємо для подальших розрахунків.

7 Прикладаємо до рухомої опори  $B$  горизонтальну одиничну силу  $P = 1$  (саме по горизонталі може рухатись дана опора) і визначаємо опорні реакції рами від дії цієї сили (рис. 3.6,а):

$$\begin{aligned} \sum P_z &= \bar{R}_1 - P = 0; & \bar{R}_1 &= P = 1; \\ \sum m_B &= \bar{R}_1 \cdot 1 - \bar{R}_2 \cdot 3 = 0; & \bar{R}_2 &= \frac{\bar{R}_1 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}; \\ \sum P_y &= \bar{R}_2 - \bar{R}_3 = 0; & \bar{R}_3 &= \bar{R}_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

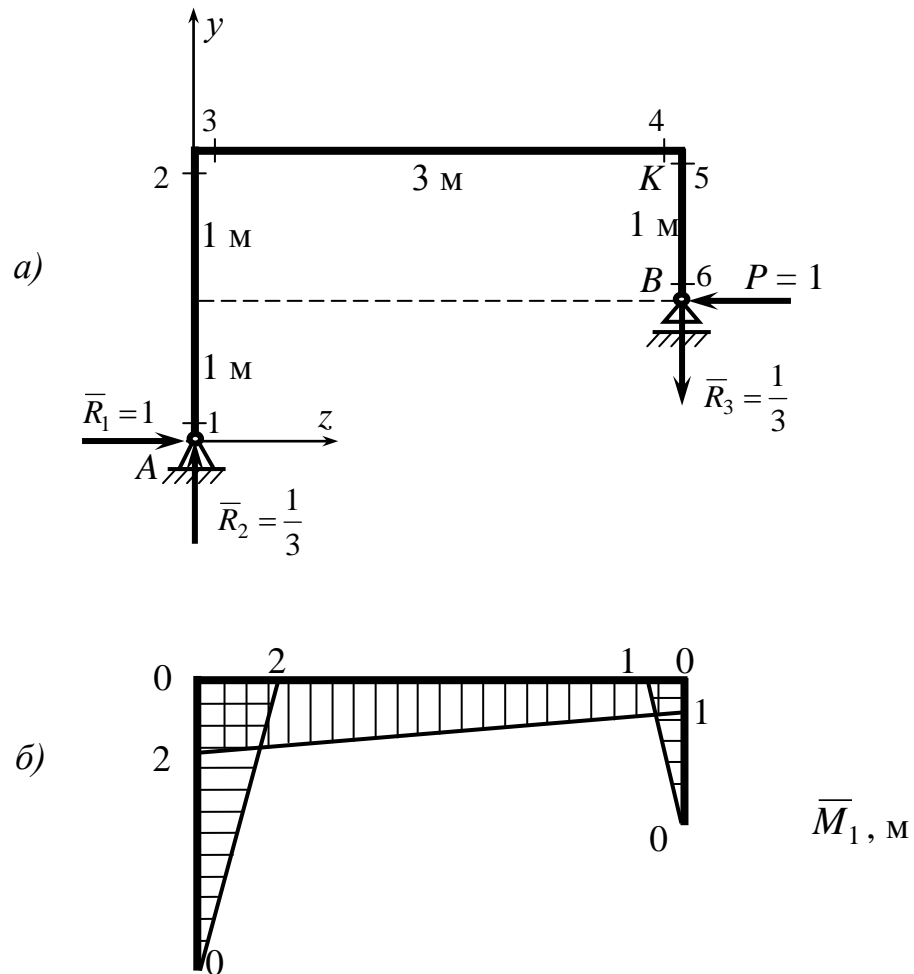


Перевірка: 
$$\sum m_A = P \cdot 1 - \bar{R}_3 \cdot 3 = 1 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 - 1 = 0.$$

Таким чином, реакції визначені правильно.

8 Будуємо епюру згинальних моментів  $\bar{M}_1$  від дії одиничної сили (рис. 3.6,б):

$$M_1 = M_6 = 0; \quad M_2 = M_3 = \bar{R}_1 \cdot 2 = 2\text{ м}; \quad M_4 = M_5 = P \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1\text{ м}.$$



*a – реакції рами; б – епюра згинальних моментів  
Рисунок 3.6 – Дія на раму одиничної сили*

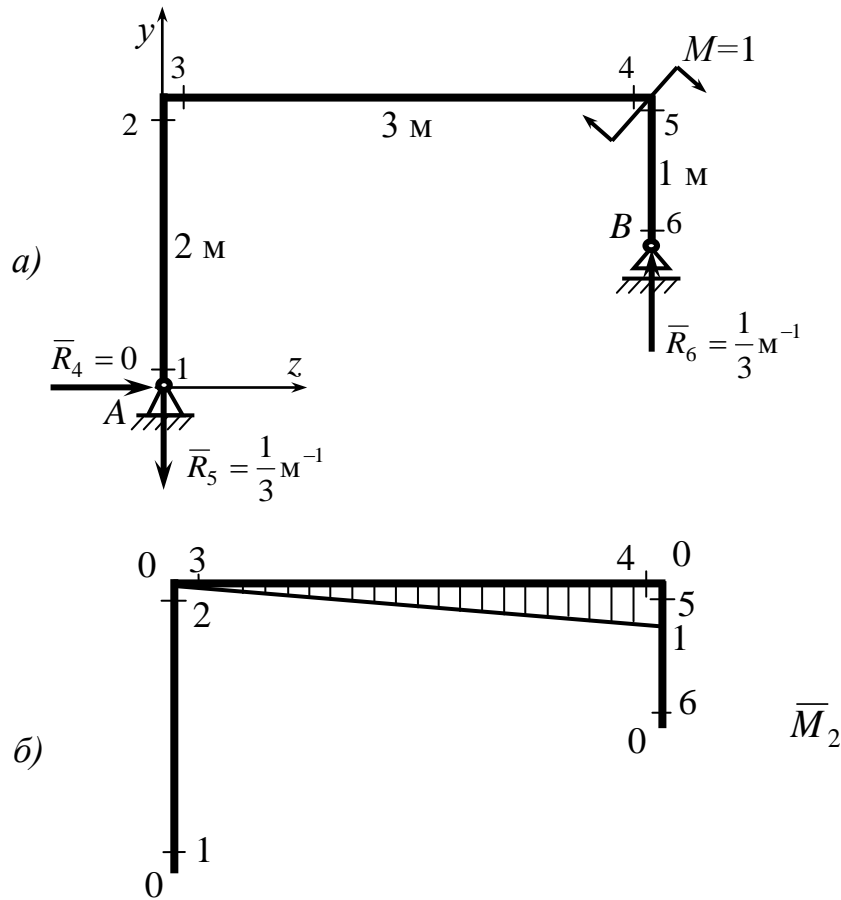
9 Визначаємо переміщення рухомої опори рами:

$$\begin{aligned} \delta_B = M \times \bar{M}_1 &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-24) \cdot (-2) + 0 \cdot (-2) + (-24) \cdot 0] + \\ &+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-33) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-33) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-2 - 1) = \frac{192}{6E \cdot J_x} + \frac{495}{6E \cdot J_x} - \frac{810}{24E \cdot J_x} = \frac{80,75}{E \cdot J_x} = \\
& = \frac{80,75 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 15,8 \text{ мм.}
\end{aligned}$$

Додатний результат означає, що опора  $B$  переміщується за напрямком одиничної сили, тобто вліво.

10 Прикладаємо до вузла  $K$  одиничний момент  $M = 1$  і визначаємо опорні реакції рами від його дії (рис. 3.7,а):



а – реакції рами; б – еюра згинальних моментів  
Рисунок 3.7 – Дія на раму одиничного моменту

$$\sum m_A = \bar{R}_6 \cdot 3 - M = 0; \quad \bar{R}_6 = \frac{M}{3} = \frac{1}{3} \text{ м}^{-1};$$

$$\sum P_y = -\bar{R}_5 + \bar{R}_6 = 0; \quad \bar{R}_5 = \bar{R}_6 = \frac{1}{3} \text{ м}^{-1};$$

$$\sum P_z = \bar{R}_4 = 0; \quad \bar{R}_4 = 0.$$

Перевірка:

$$\sum m_B = \bar{R}_5 \cdot 3 + \bar{R}_4 \cdot 1 - M = \frac{1}{3} \cdot 3 + 0 \cdot 1 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Тож, реакції визначенні правильно.

11 Будемо епюру згинальних моментів  $\bar{M}_2$  від дії одиничного моменту (рис. 3.7,б):

$$\begin{aligned} M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = \bar{R}_4 \cdot 2 = 0 \cdot 2 = 0; \quad M_4 = \bar{R}_4 \cdot 2 + \bar{R}_5 \cdot 3 = \\ = 0 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 0 + 1 = 1; \quad M_6 = M_5 = 0. \end{aligned}$$

12 Визначаємо кут повороту вузла  $K$  рами:

$$\begin{aligned} \theta_K = M \times \bar{M}_2 = \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-33) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-33) \cdot (-1) + 0 \cdot 0] + \\ + \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 - 1) = \frac{99}{6E \cdot J_x} - \frac{270}{24E \cdot J_x} = \frac{5,25}{E \cdot J_x} = \frac{5,25 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = \\ = 0,001 \text{ радіана} = 0,057 \text{ градуса.} \end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз  $K$  обертається за напрямком одиничного моменту, тобто за ходом стрілок годинника.

### 3.3 Приклад 2 розв'язання завдання 3

Схема рами зображена на рисунку 3.8. Розрахунки виконуємо відповідно до таких вихідних даних:  $q = 10$  кН/м;  $P = 16$  кН;  $M = 8$  кН·м;  $a = 3$  м;  $b = 2$  м;  $c = 1$  м;  $d = 1$  м.

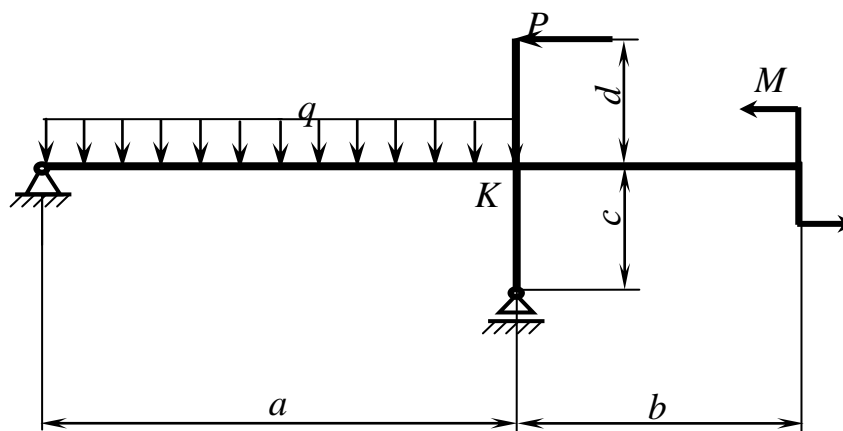


Рисунок 3.8 – Схема рами до прикладу 2 розв'язання завдання 3

## Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції рами (рис. 3.9):

$$\sum m_A = -q \cdot 3 \cdot 1,5 + P \cdot 1 + R_B \cdot 3 + M = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{3} \cdot (q \cdot 3 \cdot 1,5 - P \cdot 1 - M) = \frac{1}{3} \cdot (45 - 16 - 8) = 7 \text{ кН.}$$

$$\sum P_y = Y_A - q \cdot 3 + R_B = 0, \quad Y_A = q \cdot 3 - R_B = 30 - 7 = 23 \text{ кН;}$$

$$\sum P_z = Z_A - P = 0, \quad Z_A = P = 16 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum m_K = -Y_A \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + P \cdot 1 + M = -69 + 45 + 16 + 8 = -69 + 69 = 0.$$

Тож, реакції визначенні правильно.

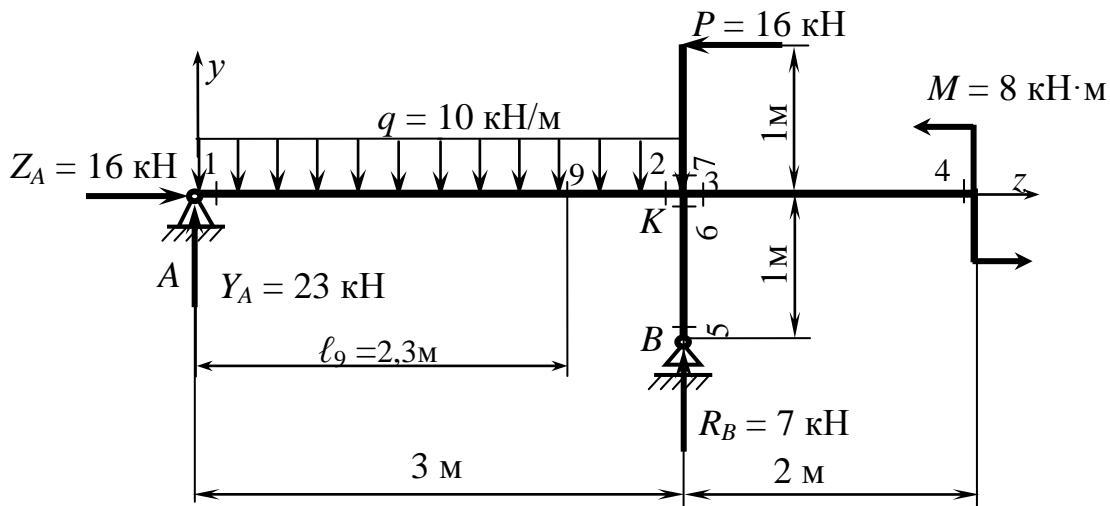


Рисунок 3.9 – Робоча схема рами

2 Будуємо епюру подовжніх сил (рис. 3.10,а):

$$N_1 = N_2 = -Z_A = -16 \text{ кН; } N_3 = N_4 = 0; N_5 = N_6 = -R_B = -7 \text{ кН; } N_7 = N_8 = 0.$$

3 Будуємо епюру поперечних сил (рис. 3.10,б):

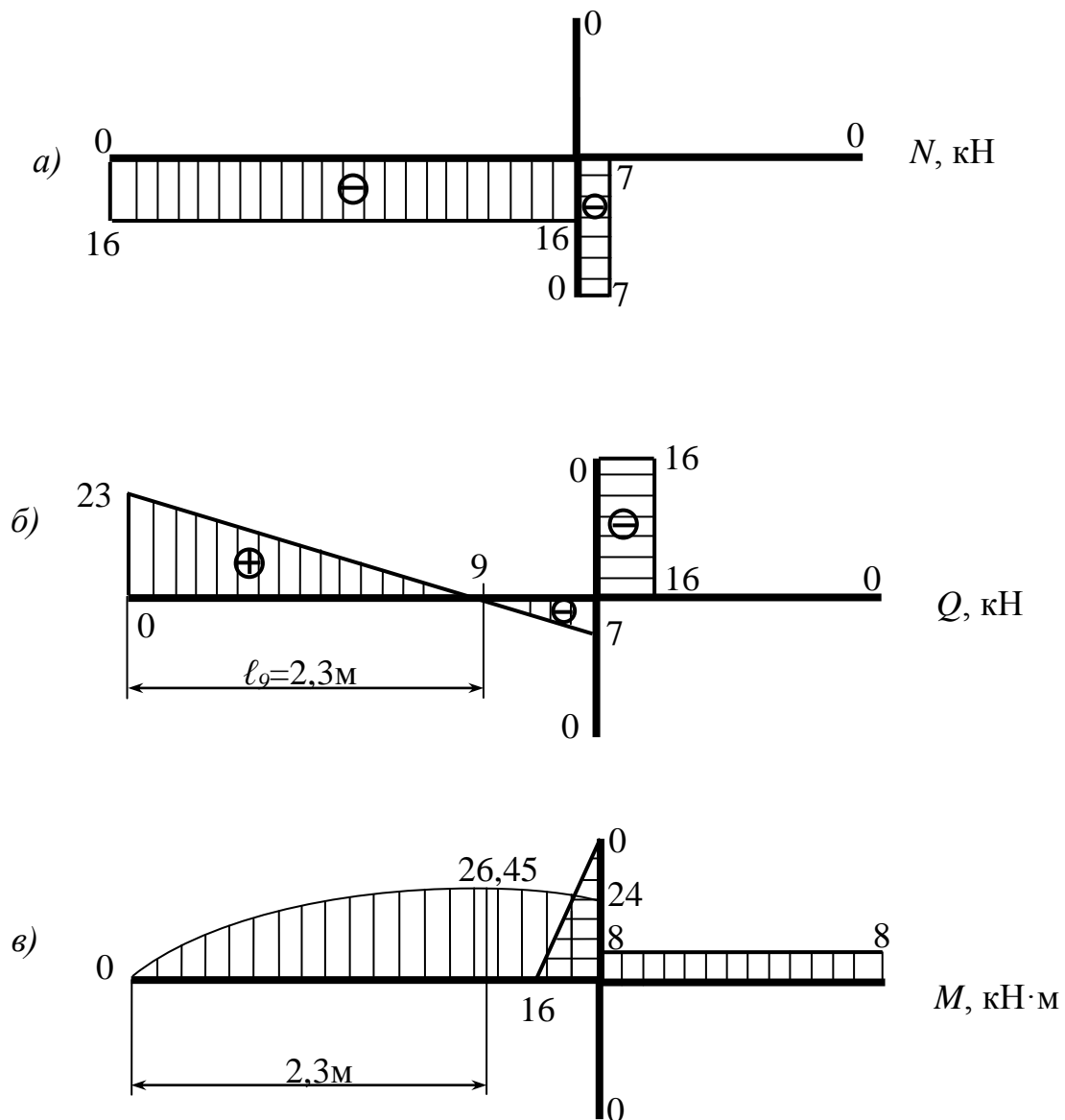
$$Q_1 = Y_A = 23 \text{ кН; } Q_2 = Y_A - q \cdot 3 = 23 - 30 = -7 \text{ кН; } Q_3 = Q_4 = 0;$$

$$Q_5 = Q_6 = 0; Q_7 = Q_8 = -P = -16 \text{ кН; } l_9 = Y_A : q = 23 : 10 = 2,3 \text{ м.}$$

4 Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 3.10,в):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = Y_A \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 69 - 45 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_4 = M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_6 = 0; \quad M_7 = P \cdot 1 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_8 = 0; \quad M_9 = Y_A \cdot \ell_9 - q \cdot \ell_9 \cdot \frac{\ell_9}{2} = \\ = 23 \cdot 2,3 - 10 \cdot 2,3 \cdot 1,15 = 52,9 - 26,45 = 26,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



*а, б – епюри подовжніх і поперечних сил; в – епюра згинальних моментів  
Рисунок 3.10 – Епюри внутрішніх зусиль рами*

5 Перевіряємо правильність побудованих епюр шляхом аналізу умов рівноваги вузла.

З рисунка 3.11 бачимо, що системи сил, діючих на вузол як на тверде тіло, перебуває в рівновазі по вертикалі й горизонталі, також моментно відносно вузлової точки *K*. Це вказує на правильність виконаних побудов.

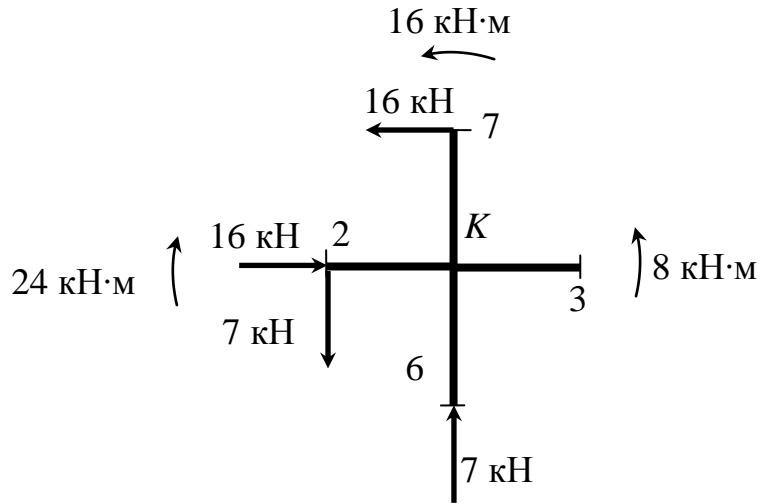


Рисунок 3.11 – Система сил, які діють на вузол K

6 Підбираємо потрібний номер двотавра для стрижнів рами:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{26,45 \cdot 10^3}{160} = 165,3125 \text{ см}^3.$$

Найближче до визначеної величини осьового моменту опору має двотавр 20, у якого  $W_x = 184 \text{ см}^3$ ,  $J_x = 1840 \text{ см}^4$  (див. додаток А). Його і приймаємо для подальших розрахунків.

7 Прикладаємо до рухомої опори B горизонтальну одиничну силу  $P = 1$  (саме по горизонталі може рухатись дана опора) і визначаємо опорні реакції рами від дії цієї сили (рис. 3.12,а):

$$\begin{aligned} \sum P_z &= \bar{R}_1 - P = 0; & \bar{R}_1 &= P = 1; \\ \sum m_A &= \bar{R}_3 \cdot 3 - P \cdot 1 = 0; & \bar{R}_3 &= \frac{P \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}; \\ \sum P_y &= -\bar{R}_2 + \bar{R}_3 = 0; & \bar{R}_3 &= \bar{R}_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

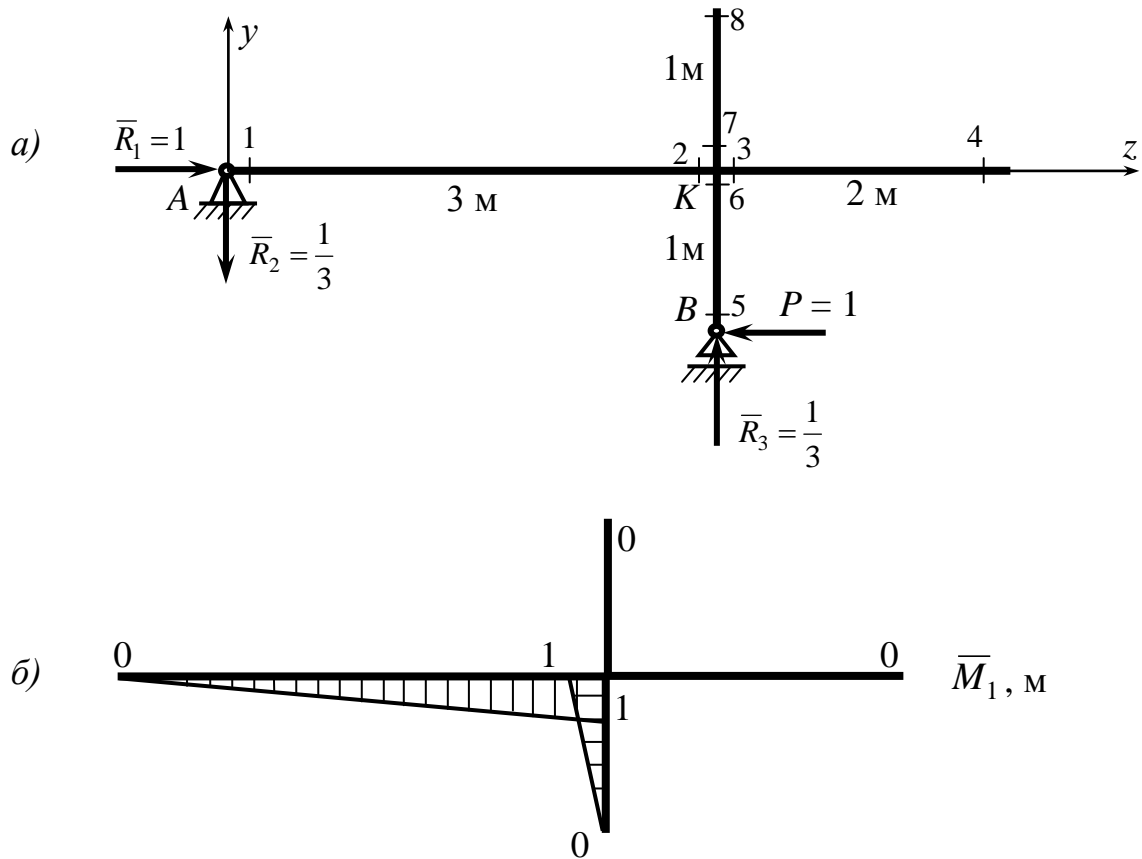
Перевірка:  $\sum m_K = \bar{R}_2 \cdot 3 - P \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 1 - 1 = 0.$

Тож, реакції визначенні правильно.

8 Будуємо епюру згинальних моментів  $\bar{M}_1$  від дії одиничної сили (рис. 3.12,б):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = \bar{R}_2 \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1\text{м}; \quad M_3 = M_4 = 0;$$

$$M_5 = 0; \quad M_6 = P \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1\text{м}; \quad M_7 = M_8 = 0.$$



*a – реакції рами; б – епюра згинальних моментів  
Рисунок 3.12 – Дія на раму одиничної сили*

9 Визначаємо переміщення рухомої опори рами:

$$\begin{aligned} \delta_B = M \times \bar{M}_1 &= \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 24 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 24 \cdot 0] + \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 - 1) = \\ &= -\frac{144}{6E \cdot J_x} - \frac{270}{24E \cdot J_x} = -\frac{35,25}{E \cdot J_x} = -\frac{35,25 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = -9,6\text{мм}. \end{aligned}$$

Від’ємний результат означає, що опора  $B$  переміщується в бік, протилежний напрямку одиничної сили, тобто вправо.

10 Прикладаємо до вузла  $K$  одиничний момент  $M = 1$  і визначаємо опорні реакції рами від його дії (рис. 3.13,а):

$$\sum m_A = -\bar{R}_6 \cdot 3 + M = 0; \quad \bar{R}_6 = \frac{M}{3} = \frac{1}{3} M^{-1};$$

$$\sum P_y = \bar{R}_5 - \bar{R}_6 = 0; \quad \bar{R}_5 = \bar{R}_6 = \frac{1}{3} M^{-1};$$

$$\sum P_z = \bar{R}_4 = 0.; \quad \bar{R}_4 = 0.$$

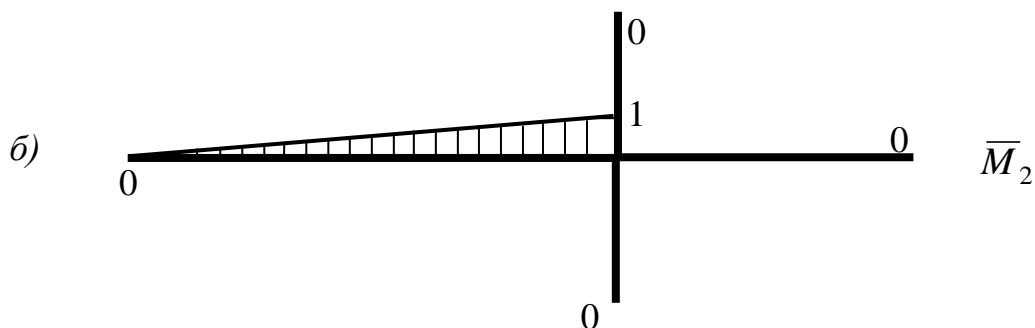
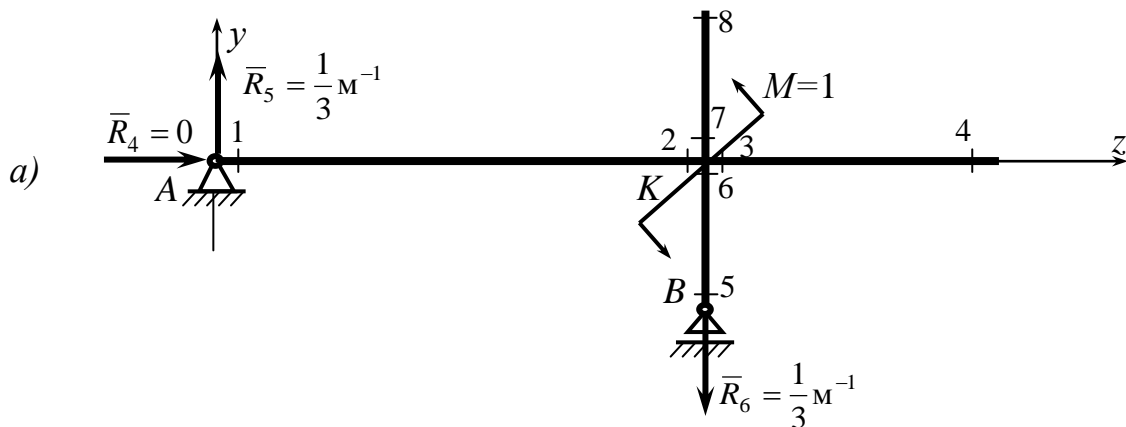
Перевірка:  $\sum m_K = -\bar{R}_5 \cdot 3 + M = -\frac{1}{3} \cdot 3 + 1 = -1 + 1 = 0.$

Таким чином, реакції визначені правильно.

11 Будуємо епюру згинальних моментів  $\bar{M}_2$  від дії одиничного моменту (рис. 3.13, б):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = \bar{R}_5 \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1;$$

$$M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = 0.$$



*a – реакції рами; б – епюра згинальних моментів*  
*Рисунок 3.13 – Дія на раму одиничного моменту*



12 Визначаємо кут повороту вузла  $K$  рами:

$$\begin{aligned}\theta_K &= M \times \bar{M}_2 = \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 24 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 24 \cdot 0] + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 + 1) = \frac{144}{6E \cdot J_x} + \frac{270}{24E \cdot J_x} = \frac{35,25}{E \cdot J_x} = \frac{35,25 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = \\ &= 0,010 \text{ радіана} = 0,57 \text{ градуса.}\end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз  $K$  обертається за напрямком одиничного моменту, тобто проти ходу стрілок годинника.

## ЛІТЕРАТУРА

- 1 Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів»: *навчальний посібник* / [Л. В. Кутовий та ін.]. – Краматорськ : ДДМА, 2007. – 220 с.
- 2 Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.
- 3 Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 654 с.
- 4 Справочник по сопротивлению материалов / [Г. С. Писаренко и др.]. – Киев : Наукова думка, 1988. – 704 с.
- 5 Холодняк Ю. С. Развитие методологии прочностных расчётов двутавровых балок / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, С. В. Капорович // Научный Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии. – Краматорск : ДГМА, 2015. – № 2 (17Е). – С. 103–114.

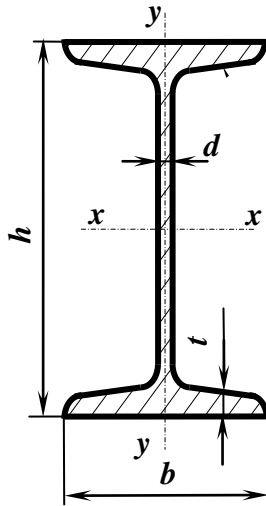
## ДОДАТОК А

### Основні параметри катаних профілів

#### 1 Нормальні лінійні розміри, мм (за ГОСТ 6636-69, фрагмент ряду Ra20)

Таблиця А.1

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900



#### 2 Двотаври сталеві гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

$h$  – висота профілю

$b$  – ширина полки

$d$  – товщина стінки

$t$  – середня товщина полки

$F$  – площа перерізу

$J$  – момент інерції

$W$  – момент опору

$i$  – радіус інерції

$S_x$  – статичний момент половини перерізу

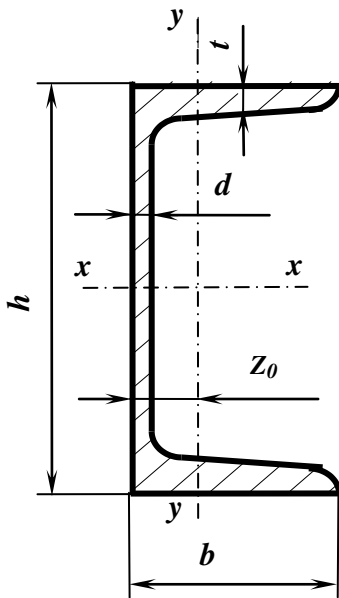
Приклад позначення профілю:

**Двотавр 30 ГОСТ 8239-89**

Таблиця А.2

Номер профілю	Основні розміри, мм				$F$ см <sup>2</sup>	$J_x$ см <sup>4</sup>	$W_x$ см <sup>3</sup>	$i_x$ см	$S_x$ см <sup>3</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см
	$h$	$b$	$d$	$t$								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1 290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1 430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1 840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2 030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2 550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2 790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3 460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3 800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5 010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5 500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7 080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7 780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9 840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19 062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27 696	1 231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39 727	1 589	19,9	919	1 043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55 962	2 035	21,8	1 181	1 356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76 806	2 560	23,6	1 491	1 725	182	3,54

### 3 Швелери сталні гарячекатані (за ГОСТ 8240-89)



Позначення:

- $h$  – висота профілю
- $b$  – ширина полки
- $d$  – товщина стінки
- $t$  – середня товщина полки
- $F$  – площа перерізу
- $J$  – момент інерції
- $W$  – момент опору
- $i$  – радіус інерції
- $S_x$  – статичний момент половини перерізу
- $Z_0$  – відстань від осі  $y$  до зовнішньої грані стінки

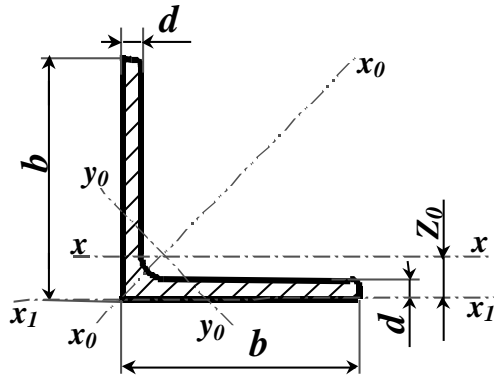
Приклад позначення профілю:

**Швелер 30 ГОСТ 8240-89**

Таблиця А.3

Номер профілю	Основні розміри, мм				$F$ см <sup>2</sup>	$J_x$ см <sup>4</sup>	$W_x$ см <sup>3</sup>	$i_x$ см	$S_x$ см <sup>3</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$Z_0$ см
	$h$	$b$	$d$	$t$									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1 670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2 330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3 180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

## 4 Кутики сталеві гарячекатані рівнополічні (за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ 2251-93)



Позначення:

$b$  – ширина полки

$d$  – товщина полки

$F$  – площа перерізу

$J$  – момент інерції

$i$  – радіус інерції

$Z_0$  – відстань від центра ваги перерізу до зовнішньої грані полки

Приклад позначення профілю:

**Кутик 50х50х3 ГОСТ 8509-93**

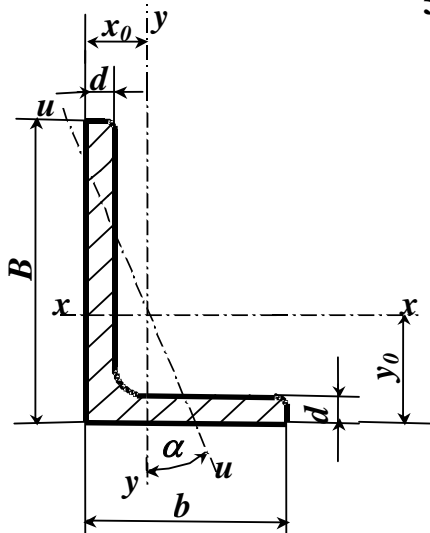
Таблиця А.4

Номер кутика	Основні розміри мм		$F$ см <sup>2</sup>	$J_x$ см <sup>4</sup>	$i_x$ см	$J_{x_0}$ max см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ max см	$J_{y_0}$ min см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ min см	$Z_0$ См
	$b$	$d$								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
7,5	75	8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
		5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
7,5	75	7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Продовження таблиці А.4

Номер кутика	Основні розміри мм		$F$ см <sup>2</sup>	$J_X$ см <sup>4</sup>	$i_X$ см	$J_{X_0}$ max см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ max см	$J_{y_0}$ min см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ min см	$Z_0$ См
	$b$	$d$								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
		8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
12,5	125	10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1 229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1 341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1 450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1 046	4,92	1 662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1 175	4,89	1 866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1 299	4,87	2 061	6,13	537	3,13	4,63
18	180	20	60,4	1 419	4,85	2 248	6,10	589	3,12	4,70
		11	38,8	1 216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	4,85
20	200	12	42,2	1 317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	4,89
		12	47,1	1 823	6,22	2 896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1 961	6,21	3 116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2 097	6,20	3 333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2 363	6,17	3 755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2 871	6,12	4 560	7,72	1 182	3,93	5,70
22	220	25	94,3	3 466	6,06	5 494	7,63	1 438	3,91	5,89
		30	111,5	4 020	6,00	6 351	7,55	1 688	3,89	6,07
		14	60,4	2 814	6,83	4 470	8,60	1 159	4,38	5,93
25	250	16	68,6	3 175	6,81	5 045	8,58	1 306	4,36	6,02
		16	78,4	4 717	7,76	7 492	9,78	1 942	4,98	6,75
		18	87,7	5 247	7,73	8 337	9,75	2 158	4,96	6,83
		20	97,0	5 765	7,71	9 160	9,72	2 370	4,94	6,91
		22	106,1	6 270	7,69	9 961	9,69	2 579	4,93	7,00
		25	119,7	7 006	7,65	11 125	9,64	2 887	4,91	7,11
25	250	28	133,1	7 717	7,61	12 244	9,59	3 190	4,89	7,23
		30	142,0	8 117	7,59	12 965	9,56	3 389	4,89	7,31

## 5 Кутики сталеві гарячекатані нерівнополічні (за ГОСТ 8510-86)



### Позначення:

$B$  – ширина більшої полки       $b$  – ширина меншої полки  
 $d$  – товщина полки               $F$  – площа перерізу  
 $I$  – момент інерції                   $i$  – радіус інерції  
 $x_0, y_0$  – відстані від центра ваги перерізу до зовнішніх граней полков,       $\alpha$  – кут нахилу осі  $u$

Приклад позначення профілю:

**Кутик 50x32x3 ГОСТ 8510-86**

Таблиця А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			$F$ см <sup>2</sup>	$J_X$ см <sup>4</sup>	$J_Y$ см <sup>4</sup>	$J_u$ мін см <sup>4</sup>	$i_u$ см	$x_0$ см	$y_0$ см	tg $\alpha$
	$B$	$b$	$d$								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			$F$ см <sup>2</sup>	$J_X$ см <sup>4</sup>	$J_Y$ см <sup>4</sup>	$J_u$ min см <sup>4</sup>	$i_u$ см	$x_0$ см	$y_0$ см	tg $\alpha$
	$B$	$b$	$d$								
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	1,08	1,17	2,65	0,386	
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1 123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1 449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1 568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1 801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2 026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3 147	1 032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4 091	1 333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4 545	1 475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4 987	1 613	949	3,48	3,85	8,31	0,405



## ДОДАТОК Б

**Параметри безпечного факторного простору двотаврів  
(сталь Ст.3,  $[\sigma] = 160$  МПа, третя теорія міцності)**

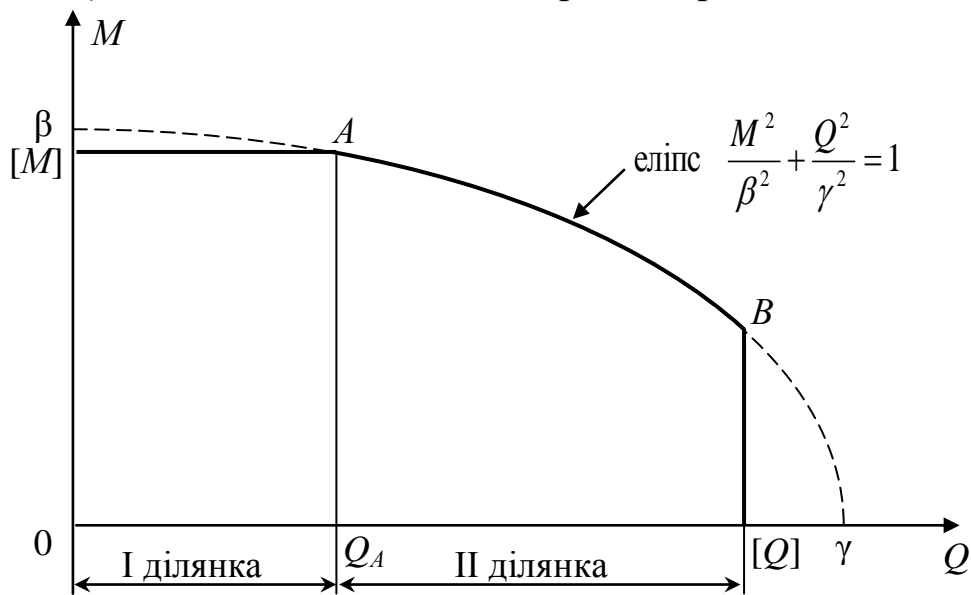


Рисунок Б.1

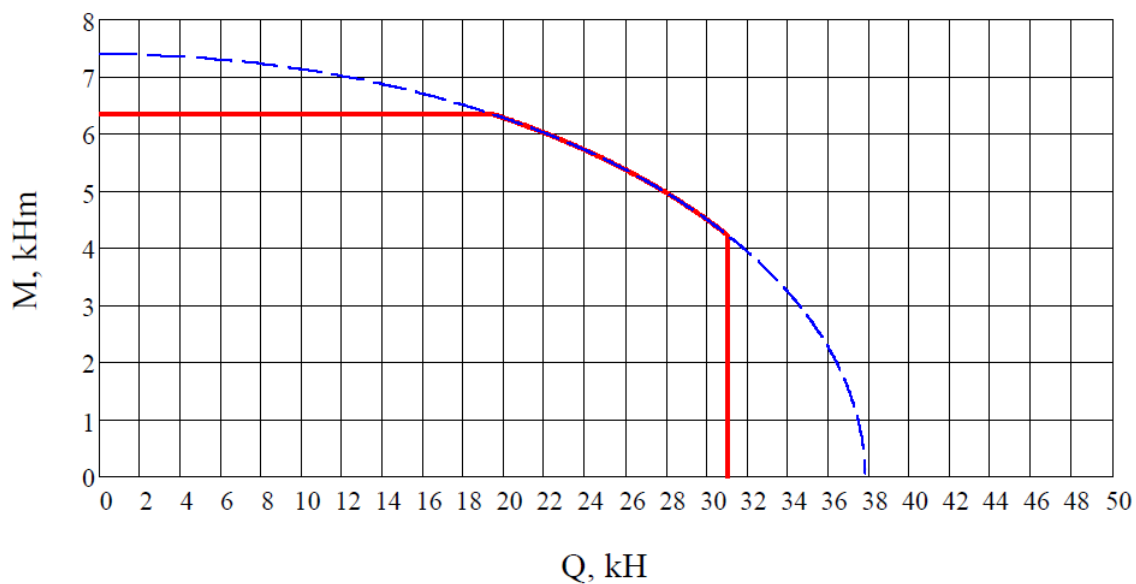
Таблиця Б.1

Номер двотавра	$\beta$ , кН·м	$\gamma$ , кН	$[M]$ , кН·м	$[Q]$ , кН	$Q_A$ , кН
10	7,402	37,758	6,352	30,991	19,385
12	10,626	49,714	9,344	39,881	23,673
14	14,643	60,227	13,072	47,911	27,140
16	19,346	70,878	17,440	56,051	30,693
18	25,201	81,860	22,880	64,658	34,314
18a	28,005	80,166	25,440	64,971	33,516
20	32,140	93,137	29,440	73,600	37,366
20a	35,536	91,513	32,480	74,077	37,127
22	40,276	106,648	37,120	84,091	41,384
22a	44,154	104,441	40,640	84,285	40,831
24	50,100	120,338	46,240	95,097	46,319
24a	55,172	118,225	50,720	95,640	46,526
27	64,026	147,557	59,360	114,515	55,298
27a	70,513	144,836	65,110	115,284	55,602
30	81,030	180,046	75,520	137,373	65,259
30a	89,361	176,713	82,880	138,548	66,071
33	102,367	215,074	95,520	162,549	77,336
36	127,657	252,820	118,880	189,787	92,126
40	163,097	316,526	152,480	232,241	112,335
45	210,216	392,515	196,960	281,236	137,179
50	270,712	494,005	254,240	345,828	169,690
55	346,380	605,383	325,600	416,990	206,528
60	435,470	727,747	409,600	494,526	247,097

**ДОДАТОК В**  
**Креслення безпечного факторного простору двотаврів**  
**(сталь Ст.3,  $[\sigma] = 160$  МПа, третя теорія міцності)**

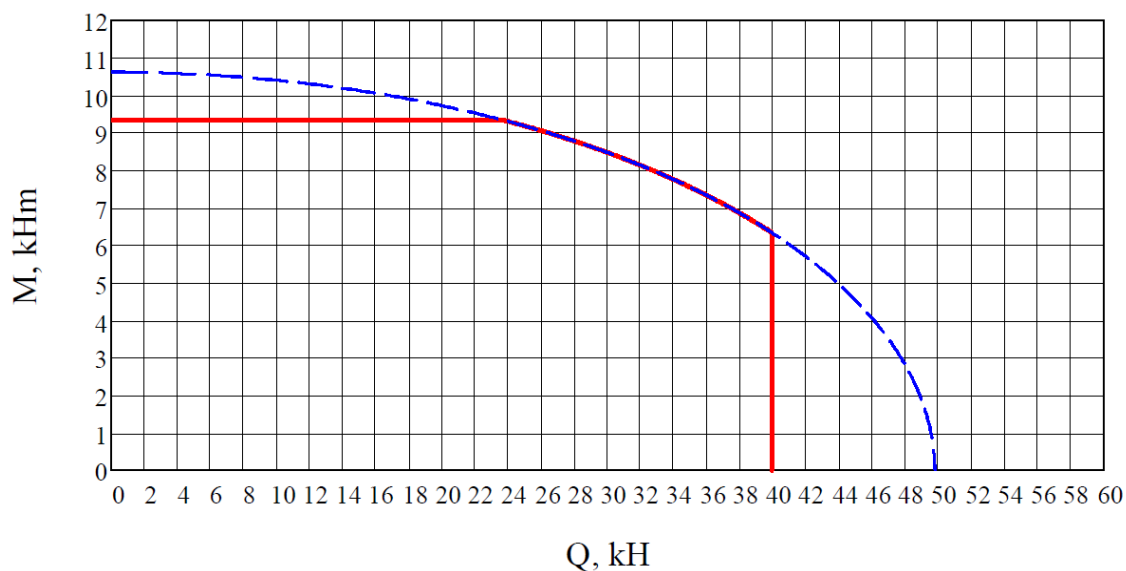
*Двотавр № 10*

$\beta = 7,402$  кН·м,  $\gamma = 37,758$  кН,  $[M] = 6,352$  кН·м,  $[Q] = 30,991$  кН



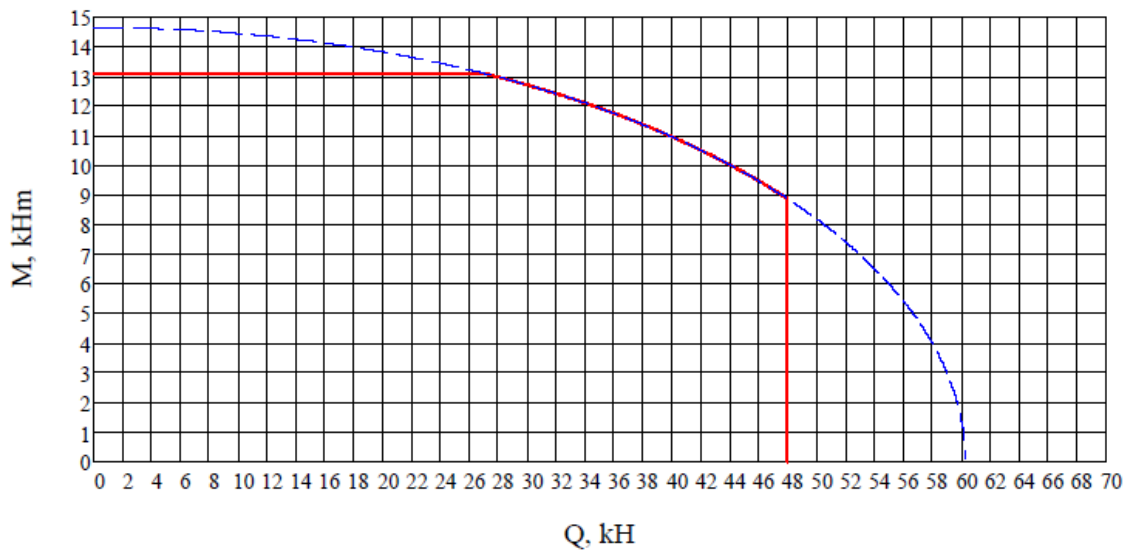
*Двотавр № 12*

$\beta = 10,626$  кН·м,  $\gamma = 49,714$  кН,  $[M] = 9,344$  кН·м,  $[Q] = 39,881$  кН



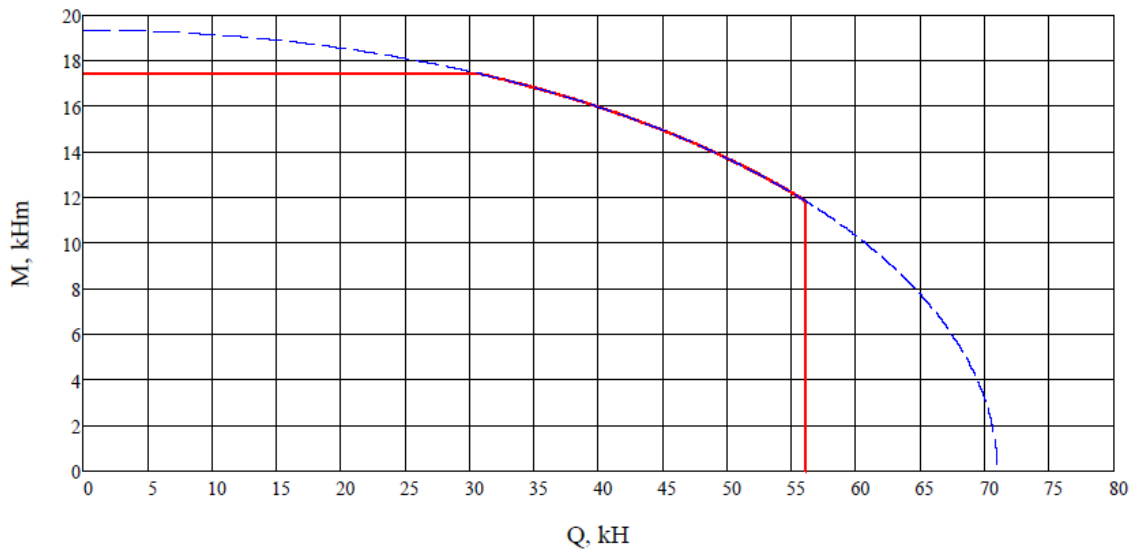
**Двотаер № 14**

$\beta=14,643$  кН·м,  $\gamma=60,227$  кН,  $[M]=13,072$  кН·м,  $[Q]=47,911$  кН



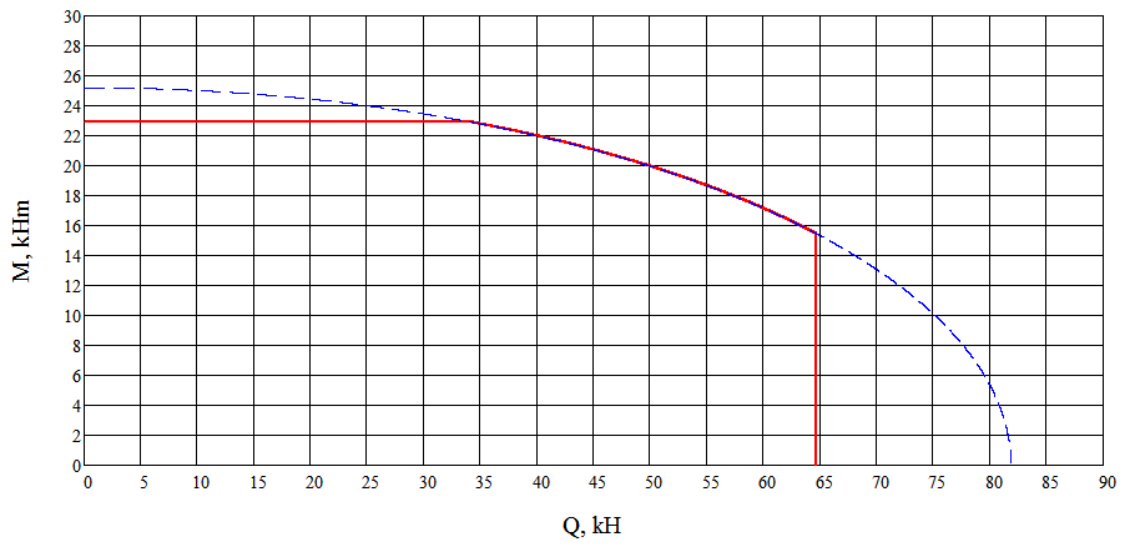
**Двотаер № 16**

$\beta=19,346$  кН·м,  $\gamma=70,878$  кН,  $[M]=17,440$  кН·м,  $[Q]=56,051$  кН



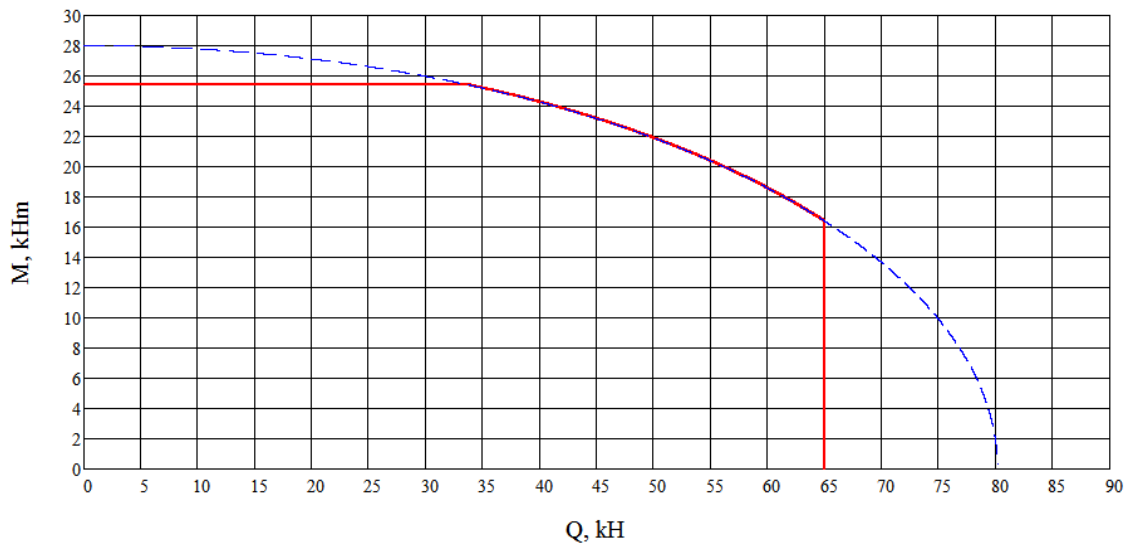
**Двотавр № 18**

$\beta=25,201$  кН·м,  $\gamma=81,860$  кН,  $[M]=22,880$  кН·м,  $[Q]=64,658$  кН



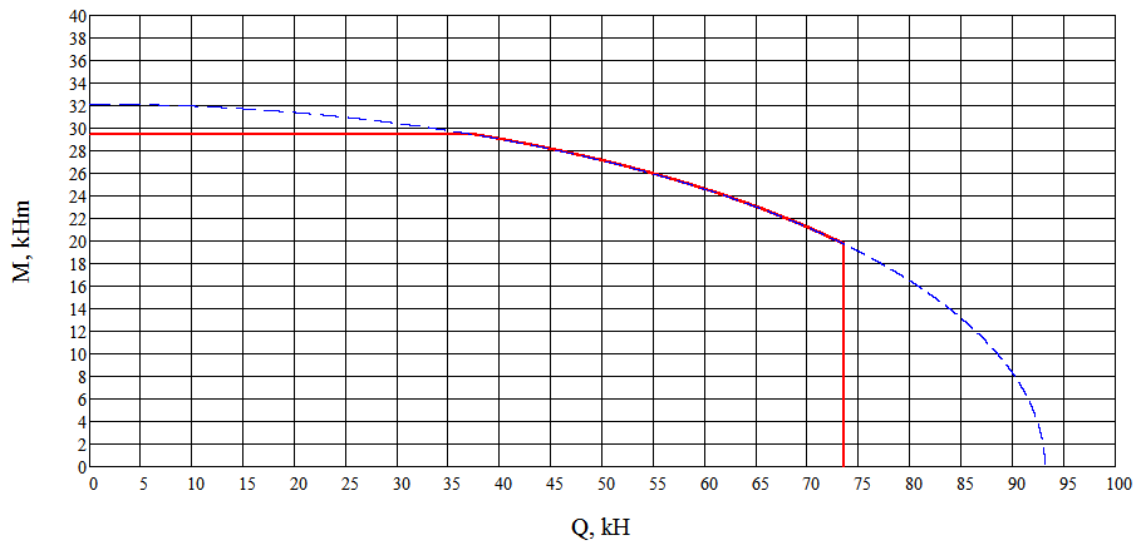
**Двотавр № 18а**

$\beta=28,005$  кН·м,  $\gamma=80,166$  кН,  $[M]=25,440$  кН·м,  $[Q]=64,971$  кН



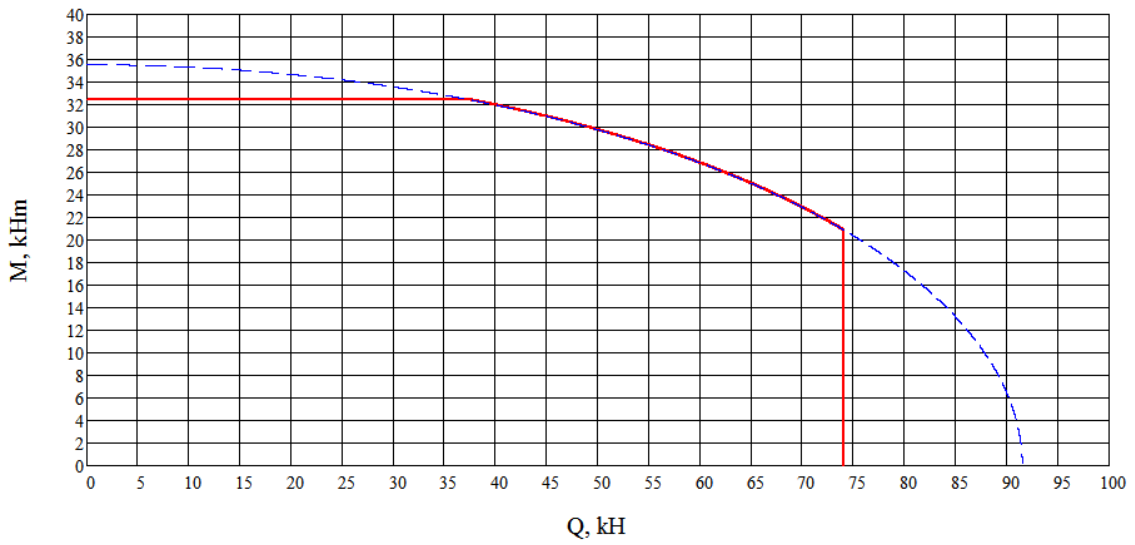
**Двотавр № 20**

$\beta=32,140$  кН·м,  $\gamma=93,137$  кН,  $[M]=29,440$  кН·м,  $[Q]=73,600$  кН



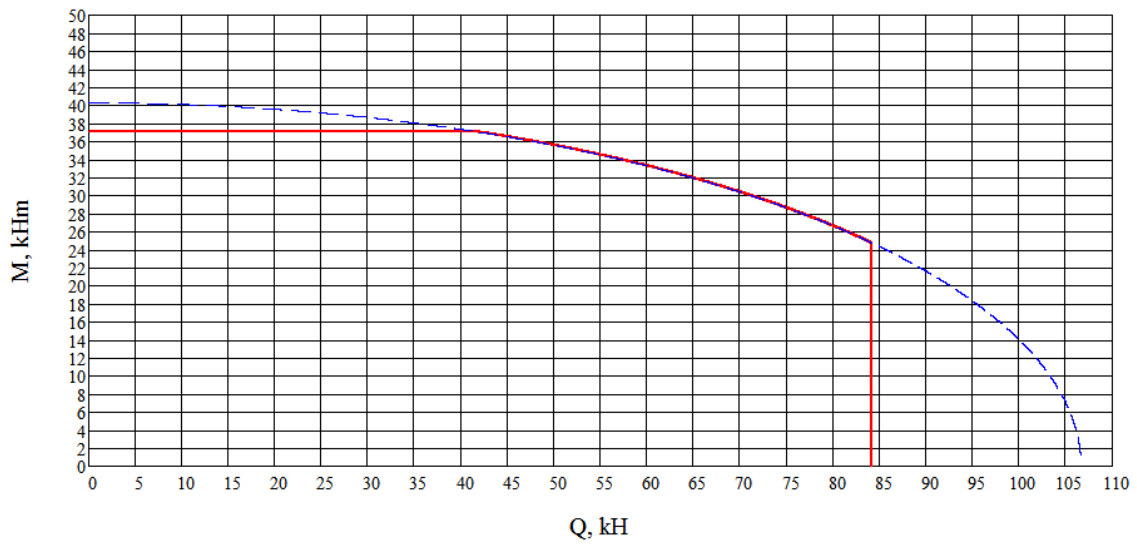
**Двотавр № 20а**

$\beta=35,536$  кНм,  $\gamma=91,513$  кН,  $[M]=32,480$  кНм,  $[Q]=74,077$  кН



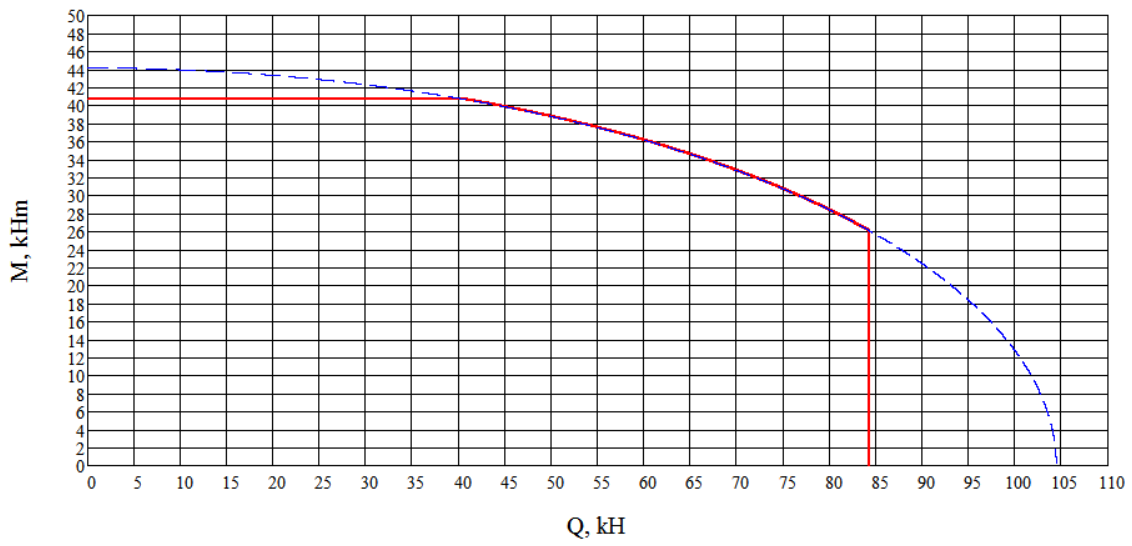
**Двотавр № 22**

$\beta=40,276$  кН·м,  $\gamma=106,648$  кН,  $[M]=37,120$  кН·м,  $[Q]=84,091$  кН



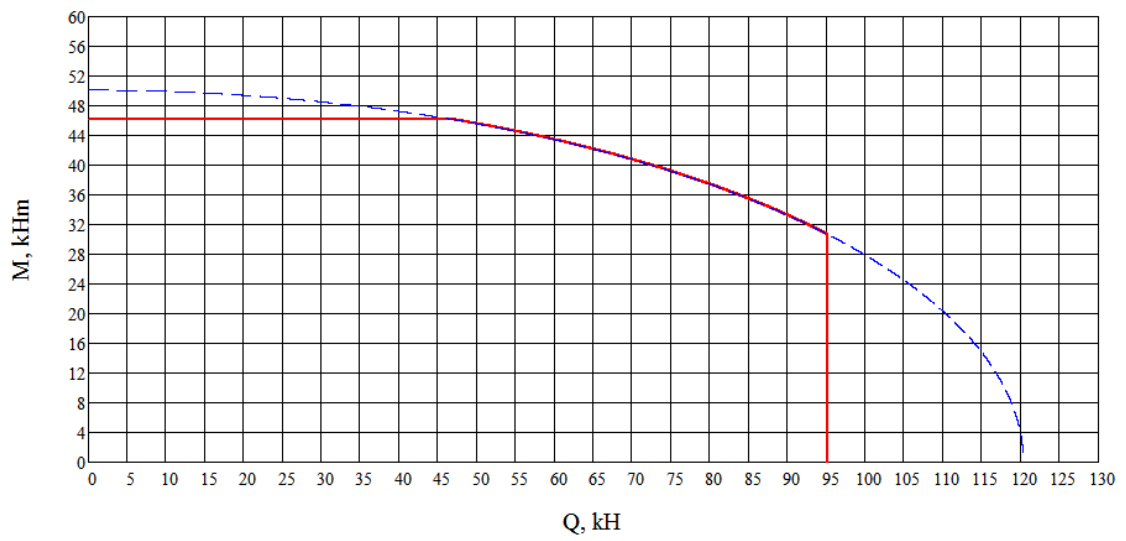
**Двотавр № 22а**

$\beta=44,154$  кН·м,  $\gamma=104,441$  кН,  $[M]=40,640$  кН·м,  $[Q]=84,285$  кН



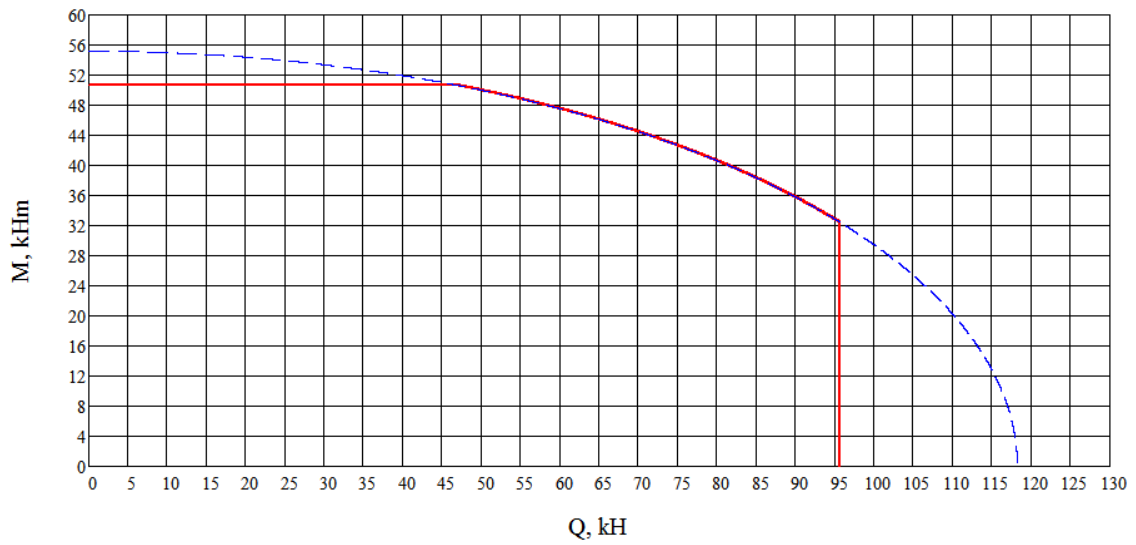
**Двотавр № 24**

$\beta=50,100$  кН·м,  $\gamma=120,338$  кН,  $[M]=46,240$  кН·м,  $[Q]=95,097$  кН



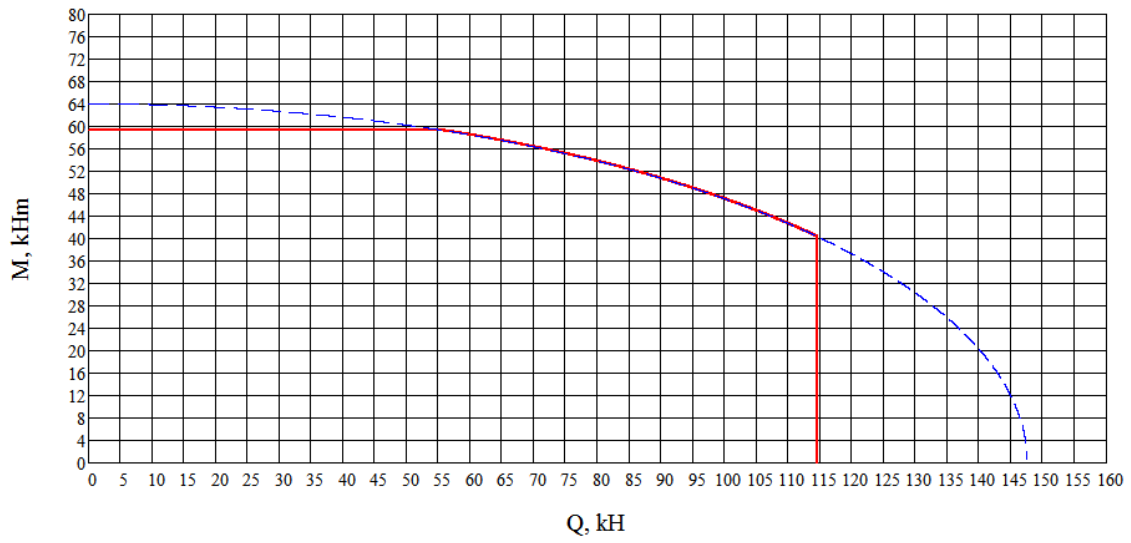
**Двотавр №24а**

$\beta=55,172$  кН·м,  $\gamma=118,225$  кН,  $[M]=50,720$  кН·м,  $[Q]=95,640$  кН



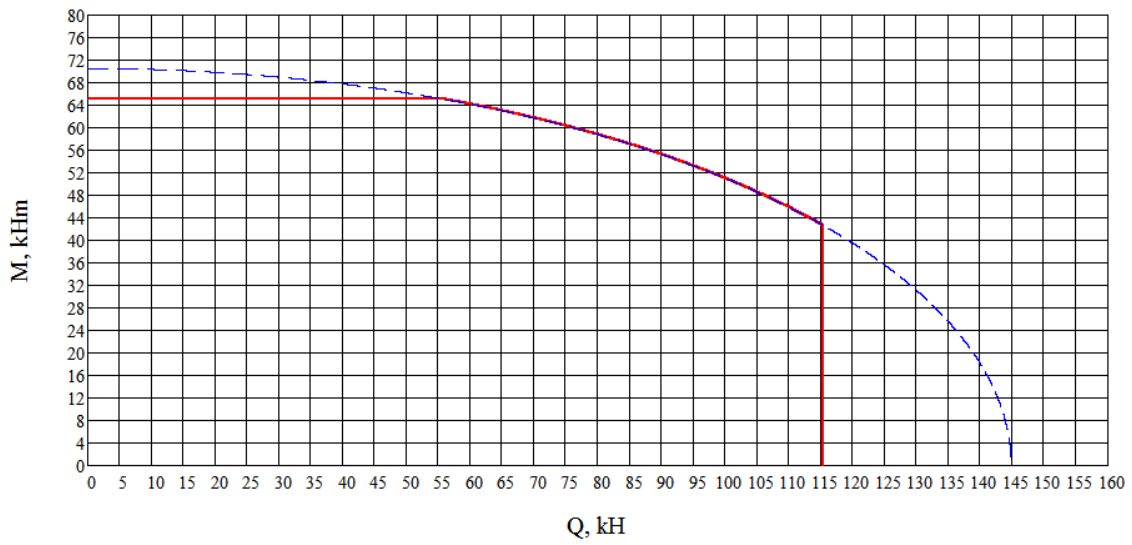
**Двотавр № 27**

$\beta=64,026$  кН·м,  $\gamma=147,557$  кН,  $[M]=59,360$  кН·м,  $[Q]=114,515$  кН



**Двотавр № 27а**

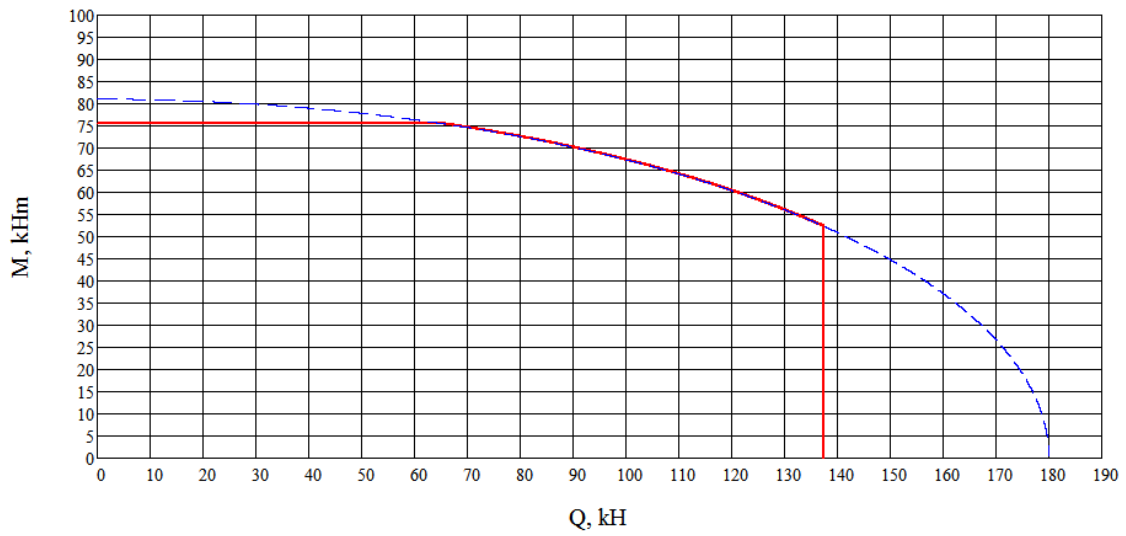
$\beta=70,513$  кН·м,  $\gamma=144,836$  кН,  $[M]=65,110$  кН·м,  $[Q]=115,284$  кН





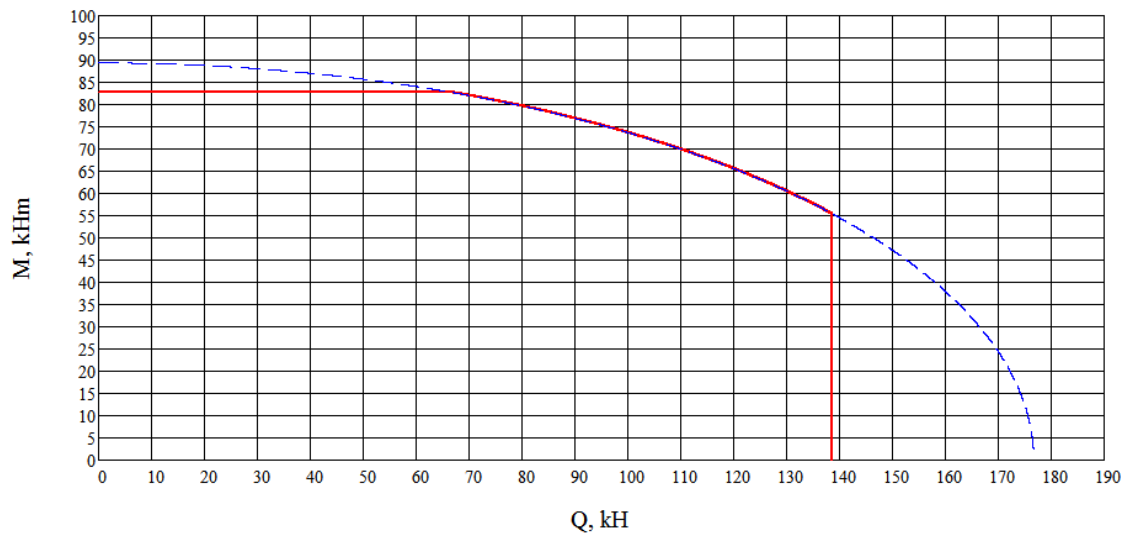
**Двотавр № 30**

$\beta=81,030$  кН·м,  $\gamma=180,046$  кН,  $[M]=75,520$  кН·м,  $[Q]=137,373$  кН



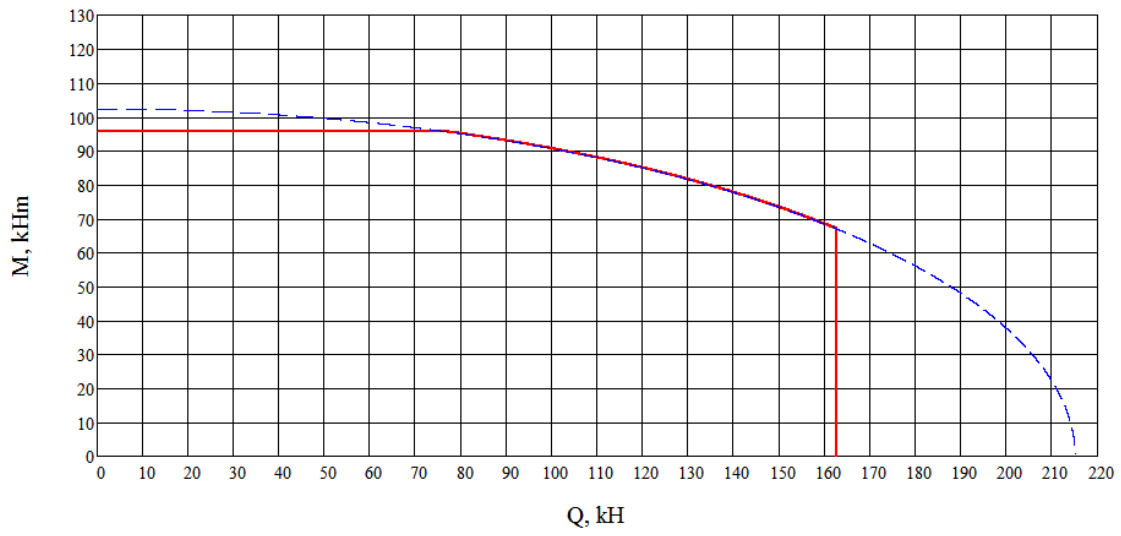
**Двотавр № 30а**

$\beta=89,361$  кН·м,  $\gamma=176,713$  кН,  $[M]=82,880$  кН·м,  $[Q]=138,548$  кН



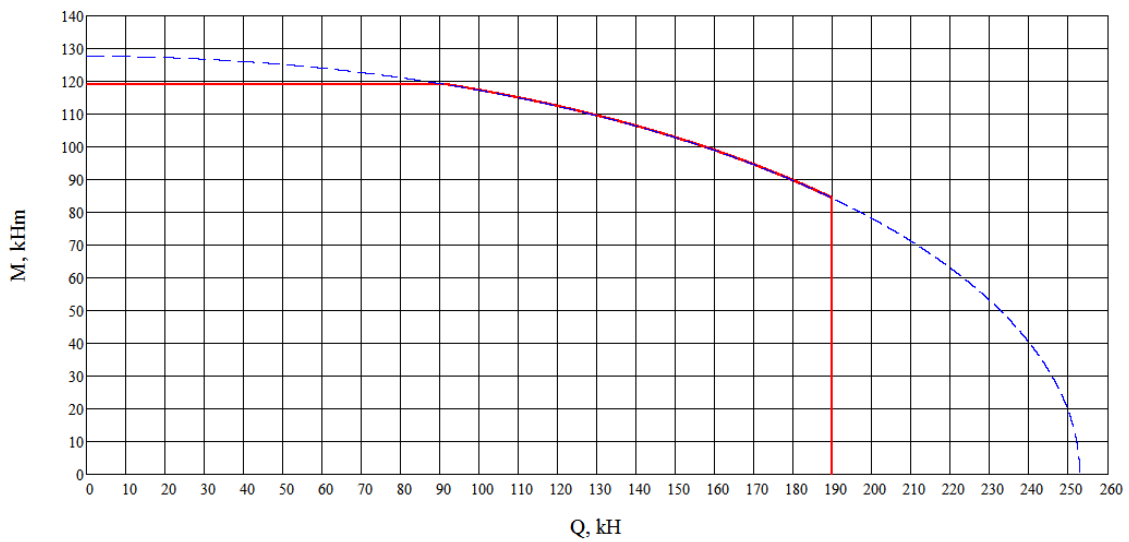
**Двотавр № 33**

$\beta=102,367$  кН·м,  $\gamma=215,074$  кН,  $[M]=95,520$  кН·м,  $[Q]=162,549$  кН



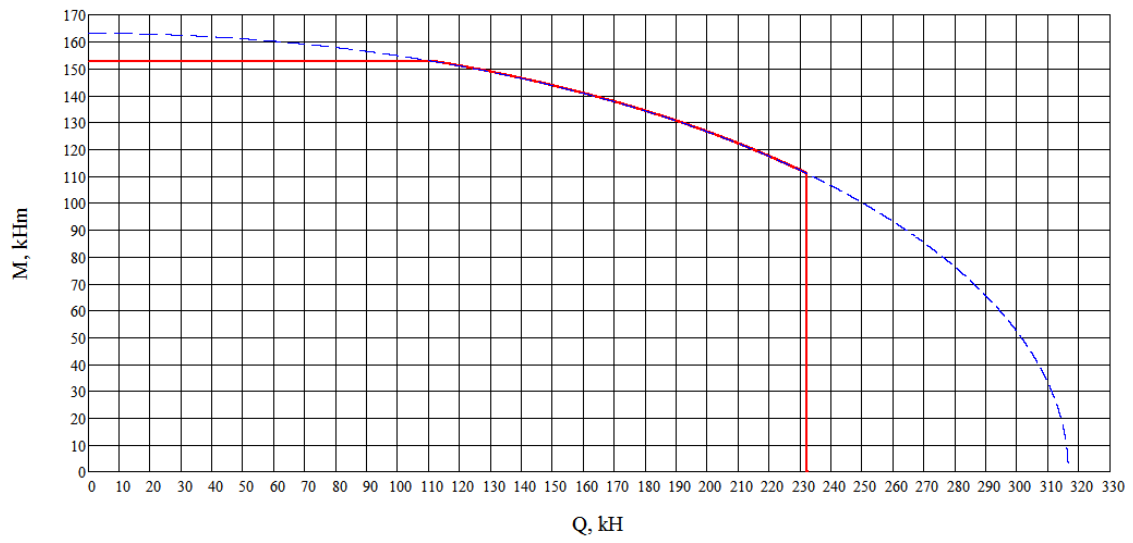
**Двотавр № 36**

$\beta=127,657$  кН·м,  $\gamma=252,820$  кН,  $[M]=118,880$  кН·м,  $[Q]=189,787$  кН



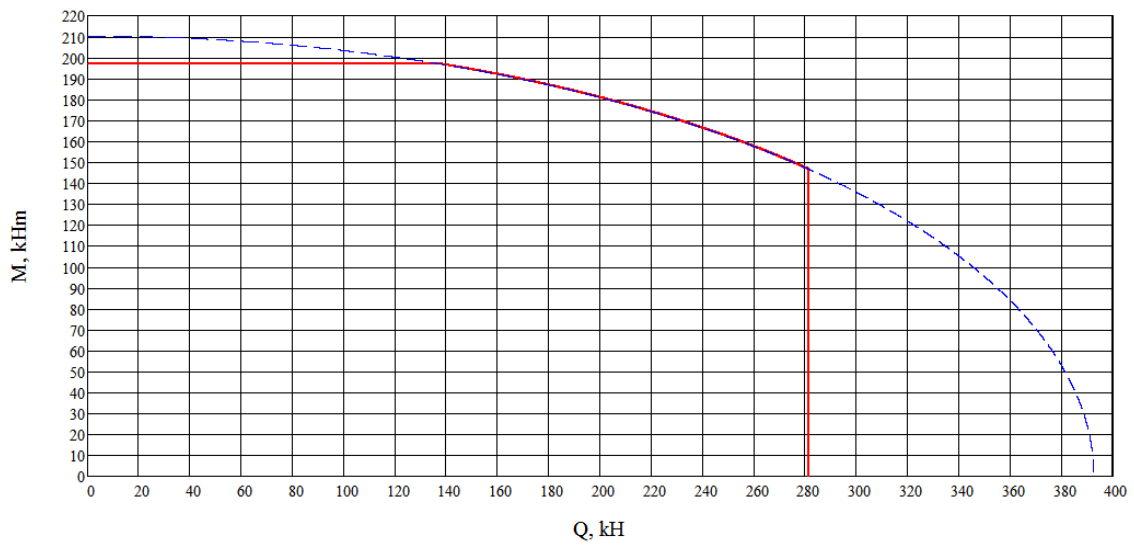
### Двотавр № 40

$\beta=163,097$  кН·м,  $\gamma=316,526$  кН,  $[M]=152,480$  кН·м,  $[Q]=232,241$  кН



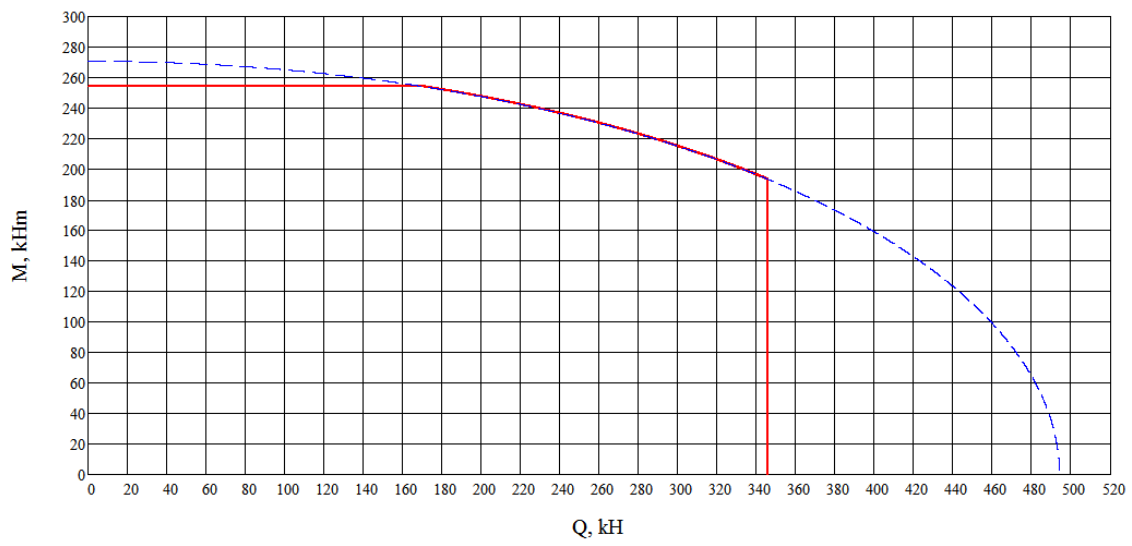
### Двотавр № 45

$\beta=210,216$  кНм,  $\gamma=392,515$  кН,  $[M]=196,960$  кНм,  $[Q]=281,236$  кН



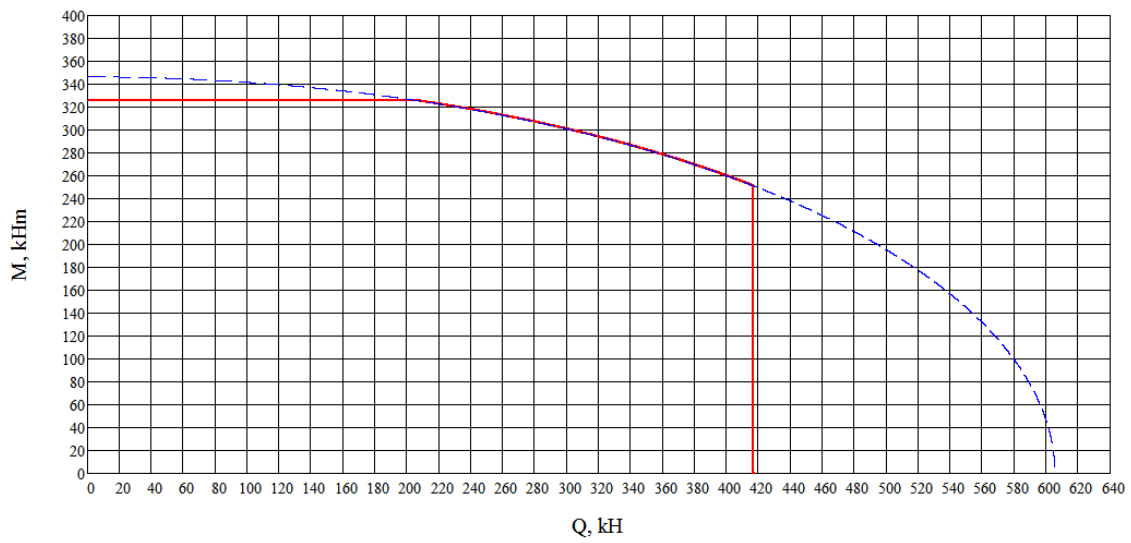
**Двотавр № 50**

$\beta=270,712$  кН·м,  $\gamma=494,005$  кН,  $[M]=254,240$  кН·м,  $[Q]=345,828$  кН



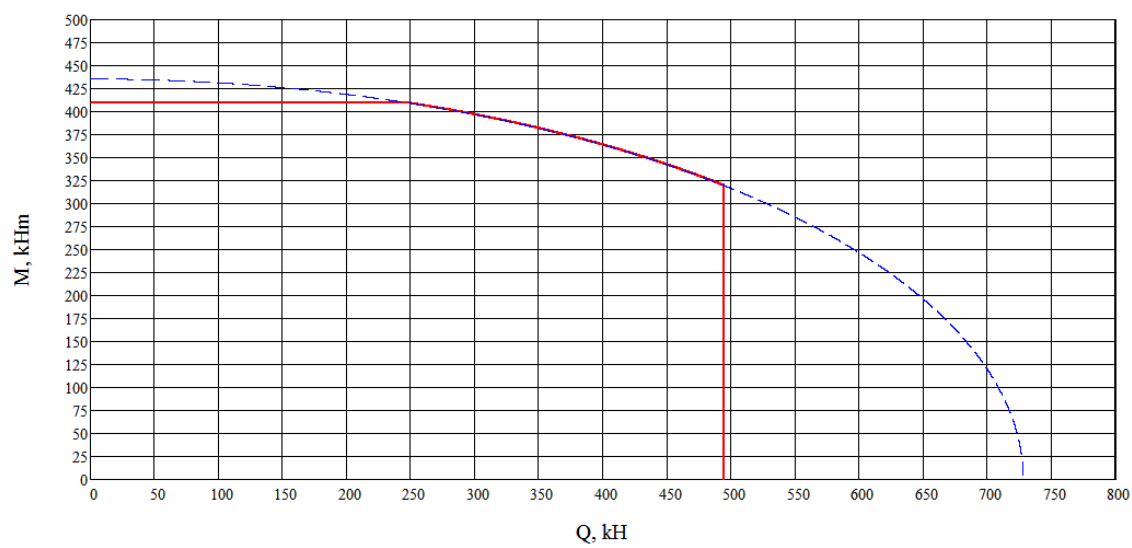
**Двотавр № 55**

$\beta=346,380$  кН·м,  $\gamma=605,383$  кН,  $[M]=325,600$  кН·м,  $[Q]=416,990$  кН



**Двотавр № 60**

$\beta=435,470$  кН·м,  $\gamma=727,747$  кН,  $[M]=409,600$  кН·м,  $[Q]=494,526$  кН



**ДОДАТОК Г**  
**Формула крайніх ординат**

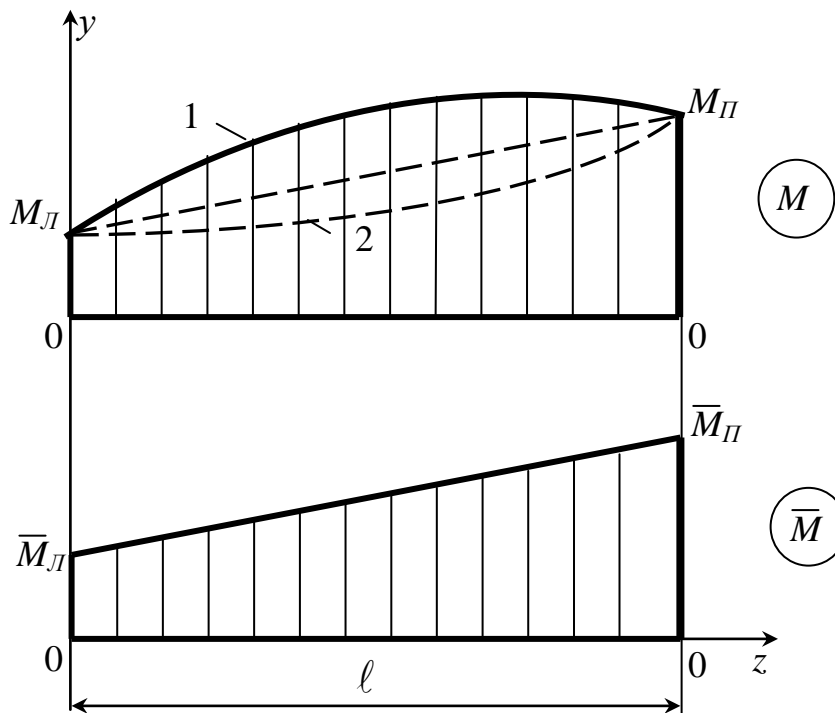


Рисунок Б.1

$$\Delta = M \times \bar{M} = \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_L \cdot \bar{M}_L + 2M_{II} \cdot \bar{M}_{II} + M_L \cdot \bar{M}_{II} + M_{II} \cdot \bar{M}_L) \pm \frac{q \cdot \ell^3}{24E \cdot J_x} (\bar{M}_L + \bar{M}_{II}).$$

Формула призначена для визначення (по Мору) переміщень в балках і рамах при плоскому згині. В ній позначено:

$\Delta$  – переміщення (лінійне –  $\delta$ , кутове –  $\theta$ ) в заданому місці балки або рами;

$M$  і  $\bar{M}$  – відповідно епюри згинальних моментів від заданого навантаження і одиничного силового фактору (сили або моменту);

$\ell$  – довжина ділянки балки або стрижня рами (тобто відрізьку, на якому кожна з обох епюр зображується єдиною лінією);

$z$ у – силова площина;

$J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$  (на рисунку не показана);

$E$  – модуль пружності першого роду для матеріалу балки або рами;

$q$  – інтенсивність розподіленого навантаження;

$M_L, M_{II}$  – крайні ординати епюри  $M$ ;

$\bar{M}_L, \bar{M}_{II}$  – крайні ординати епюри  $\bar{M}$ .

Формула застосовується для кожної ділянки балки, де обидві епюри не є нульовими, після чого знайдені для всіх ділянок величини  $\Delta$  складаються з урахуванням їхніх знаків. У рамках ці величини визначаються для всіх зазначених ділянок усіх стрижнів.

Величини крайніх ординат обох епюр підставляються у формулу зі своїми знаками; на схемі вони показані як додатні.

Знак "плюс" перед поправкою на кривизну (тобто другою складовою у формулі крайніх ординат) ставиться в разі, коли епюра  $M$  є опуклою (крива 1), а "мінус" – коли вона угнута (крива 2). Коли ж ця епюра прямолінійна, поправка на кривизну дорівнює нулю.

**ДОДАТОК Д**  
**Зразок титульного аркуша розрахунково-графічного завдання**

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ**

**Кафедра технічної механіки**

**Розрахунково-графічне завдання № 1.1 з опору матеріалів**  
**Розрахунок стрижневих систем, які працюють**  
**на розтягання та стискання**  
Варіант № 7214

Виконав  
Студент гр. ТМ- 19-1  
Петренко М. П.

Перевірів  
Іванов М.П.

Краматорськ 2020



*Навчальне видання*

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

### **Розрахунково-графічні завдання до тем 6 і 7**

**для студентів усіх механічних спеціальностей  
денної прискореної форми навчання**

Укладачі **ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович,  
ЧОСТА Наталія Вікторівна**

За авторською редакцією  
Комп'ютерне верстання **І. І. Дьякова**

65/2021. Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк. 3,72.  
Обл. – вид. арк. 1,04. Тираж 50 пр. Зам. №.....

Видавець і виготовлювач  
Донбаська державна машинобудівна академія  
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 1633 від 24.12.2003